

Spieldauer:

Von Jakob Bernoullis Lösung der fünften Aufgabe von Huygens
bis zu den Arbeiten von de Moivre

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich
von
KARL KOHLI
aus Rüschegg BE
Begutachtet von Herrn
Prof. Dr. B. L. van der Waerden

1970

Zürich 1967

Spieldauer:

1

Von Jakob Bernoullis Lösung der fünften Aufgabe von Huygens
bis zu den Arbeiten von de Moivre

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich
von
KARL KOHLI
aus Rüschegg BE
Begutachtet von Herrn
Prof. Dr. B. L. van der Waerden

Zürich 1967

Problemstellung und Einführung	3
1. Die fünfte Aufgabe von Huygens; die Lösungen von Jakob Bernoulli, Montmort und de Moivre	5
2. Spieldauer; die Lösungen von Montmort und Niklaus Bernoulli	12
3. Spieldauer; die rationalen Lösungen von de Moivre	15
4. Die erzeugende Funktion im Problem der Spieldauer	25
5. Rekurrente Reihen	32
6. Kreisteilung und Spieldauer	46
7. Anhang	53
Quellen- und Literaturverzeichnis	56
Lebenslauf	59



a) Problemstellung

Zwei Spieler A und B haben m bzw. n Münzen. Sie spielen nach folgender Vereinbarung: Wenn ein Spieler einen Gang gewinnt, so erhält er vom Gegner eine Münze. Es wird gespielt, bis ein Spieler im Besitze aller Münzen ist. Die Chancen der Spieler, einen einzelnen Gang zu gewinnen – ich nenne sie Primärchancen –, verhalten sich wie $a:b$. Gefragt wird nach dem Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten, letztlich Sieger zu sein, und nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spieldauer.

Physikalische Anwendungen setzen eine andere Interpretation voraus: Ein Teilchen bewegt sich auf der x -Achse. Jede Sekunde springt es eine Einheit nach rechts oder links. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verhalten sich wie $a:b$. Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen im Nullpunkt, eine Sekunde später ist es also im Punkt $+1$ oder -1 . Der Versuch ist fertig, wenn der Punkt $+n$ oder $-m$ erreicht ist.

Diese zweite Deutung des Problems wird noch anschaulicher, wenn das Teilchen pro Sekunde nicht nur um eine Einheit zur Seite, sondern zugleich um eine Einheit nach unten springt. Diese Darstellungsweise ist als «Irrfahrt im Straßennetz» und als «Galtonbrett» bekannt.

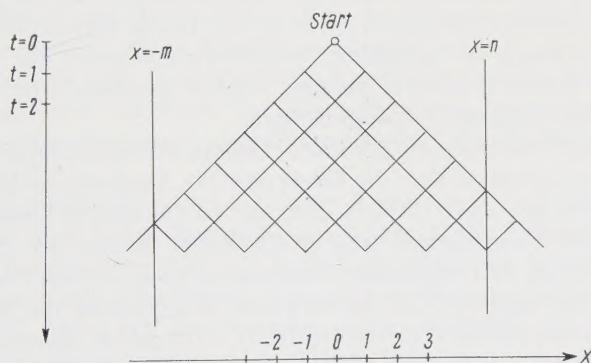


Fig. 1

b) Einführung

Im Jahre 1654 hatten Blaise Pascal und Pierre de Fermat in ihrem Briefwechsel den eigentlichen Auftakt zur Lehre von den Wahrscheinlichkeiten gegeben. Christiaan Huygens (1629–1695), der 1655 einige Monate in Paris weilte, hörte dort von den aufgeworfenen Problemen, löste sie selbständig und konnte schon im folgenden Frühjahr

seinem Lehrer Franciscus van Schooten das Manuskript einer Wahrscheinlichkeitstheorie vorlegen. Dieser übersetzte die holländisch verfaßte Arbeit ins Lateinische und nahm sie unter dem Titel *De Ratiociniis in Aleæ Ludo* als Anhang in seine *Exercitationum Mathematicarum libri V* auf, welche 1657 in lateinischer (1660 in holländischer) Sprache erschienen. Huygens' Abhandlung blieb lange die einzige Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre, bis sich zu Beginn des 18. Jahrhunderts gleich drei Mathematiker um die Entwicklung der Mutmaßungskunst Verdienste erwarben: Jakob Bernoulli (1655–1705), Pierre Rémond de Montmort (1678–1719) und Abraham de Moivre (1667–1754).

Jakob Bernoulli beschäftigte sich schon seit ungefähr 1680 mit diesem Problemkreis. Seine Überlegungen notierte er ausführlich in sein mathematisches Tagebuch (*Meditationes*). Er war sich der Bedeutung seiner Gedanken bewußt und hatte die Absicht, sie in einem geschlossenen Werke unter dem Titel *Ars Conjectandi* zu veröffentlichen. Aber der Tod raffte 1705 den erst 50jährigen hinweg, noch bevor er das Manuskript für den vierten und letzten Teil vollendet hatte, in welchem er Beispiele für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse geben wollte. So wie das Werk vom Verfasser hinterlassen worden war, erschien es 1713 im Druck. Doch schon 7 Jahre vorher konnte die Fachwelt in zwei Elogen auf Jakob Bernoulli von dieser Arbeit hören. Die eine erschien im *Journal des Sçavans* (Paris 1706) auf Seite 66 ff., die andere in der *Histoire de l'Academie Royale des Sciences* vom Jahre 1705 auf den Seiten 139–150. In der Eloge des *Journal des Sçavans* steht unter anderem, daß Bernoulli die fünf Aufgaben gelöst habe, welche Huygens am Schluß seiner Abhandlung gestellt hatte.

Montmort schreibt im Vorwort zu seinem *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* (Seite V), daß ihm die oben genannten Berichte vom Erfolg Bernoullis den Mut gaben, auch selber solche Probleme anzugehen. Sein Werk erschien 1708. Schon 5 Jahre später folgte eine zweite, erweiterte Auflage, welcher Montmort auch seinen bisherigen Briefwechsel mit Niklaus Bernoulli beifügte.

Montmorts Buch und die Anregung des Earls of Radnov Francis Robartes veranlaßten Abraham de Moivre, ebenfalls über die Spiele und ihre Ausgänge nachzudenken (siehe Vorwort zu *De Mensura Sortis* [7.1], S. 214, und zu *Doctrine of Chances* [8.1], S. I). Das Resultat dieser Überlegungen trug er der Royal Society vor unter dem Titel *De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus*. Dieser Vortrag wurde in den *Philosophical Transactions* der Monate Januar, Februar und März des Jahres 1711 veröffentlicht. 1718 gab de Moivre eine erweiterte Fassung mit dem Titel *The Doctrine of Chances : or A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play* heraus. Zwei weitere Auflagen folgten 1738 und, zwei Jahre nach seinem Tode, 1756. Ein Werk, das mit der *Doctrine of Chances* in enger Beziehung steht und insbesondere mit der Theorie der rekurrenten Reihen die Einführung der erzeugenden Funktion vorbereitete, erschien 1730: *Miscellanea analytica de Seriebus et Quadraturis*.

DIE FÜNFTE AUFGABE VON HUYGENS;
DIE LÖSUNGEN VON JAKOB BERNOULLI, MONTMORT
UND DE MOIVRE

Wie schon erwähnt, hat Huygens am Schlusse seiner Abhandlung dem Leser fünf Aufgaben gestellt. Die fünfte lautet: A und B nehmen je 12 Münzen. Sie spielen mit drei Würfeln unter folgender Bedingung: Wird 11 geworfen, so gibt A eine Münze an B ab; fällt aber 14, so erhält A eine Münze von B . Wer zuerst im Besitze aller Münzen ist, hat gewonnen. Man findet, daß sich die Siegeschancen von A zu denen von B wie 244140625 zu 282429536481 verhalten.

Dieses, wie sich zeigen wird, sehr folgenreiche Problem stammt nicht von Huygens selbst, sondern von Pascal, der es als weitaus schwierigstes aller bisherigen Probleme an Fermat gestellt hatte. Pierre de Carcavy, ein Freund der beiden vorgenannten, berichtete darüber in einem Brief vom 28. September 1656 an Huygens. Dieser sandte schon nach wenigen Tagen die Lösung eines allgemeineren Problems an seinen Berichterstatter, allerdings ohne Beweis. Die Aufgabe selbst fügte er zusammen mit vier andern seiner Arbeit über Glücksspiele bei. Ausführlicher wird darüber in den *Œuvres complètes* von Huygens berichtet (siehe [1]: Band I, S. 492–494; S. 505–506; Band V, S. 470–471; Band XIV, S. 11, Fußnote 15; S. 15; S. 29; S. 90–91; S. 151–155). Dort findet sich auch ein Beweis von Hudde für die Lösung bei drei Münzen aus dem Jahre 1665 und ein Beweis von Huygens von 1676, der allerdings nicht für eine beliebige Anzahl von Münzen gilt, wie es Huygens gewünscht hatte.

Als einer der nächsten griff Jakob Bernoulli das Problem auf. Er berichtet darüber in seinem mathematischen Tagebuch. Zur Geschichte dieses Tagebuches vergleiche man das Vorwort des Herausgebers (O. Spieß) des Bandes I des Briefwechsels von Johann Bernoulli (siehe [20]).

Der wahrscheinlichkeitstheoretische Teil des Tagebuches wird erstmalig im dritten Band der Werke von Jakob Bernoulli veröffentlicht. Der Herausgeber dieses Bandes, B. L. van der Waerden, hat mir freundlicherweise das Manuskript zur Verfügung gestellt. Die Lösung der fünften Aufgabe von Huygens finden wir im Tagebuch unter Artikel 67. Nach van der Waerden schrieb Bernoulli den Artikel 67 sicher nicht vor, sondern wahrscheinlich in dem Jahre 1684.

Bernoulli geht streng nach Huygens vor: Er leitet die gesuchte Hoffnung (Erwartungswert) aus anderen Hoffnungen ab. Wie schon im 14. Problem von Huygens ist das hier nicht ohne Analysis möglich. Bernoulli schreibt (nach Zusammenfassung von Prof. van der Waerden):

«Wenn A schon 24 Münzen hat und B keine, so erhält er den Einsatz a . Sehen wir nun zu, was geschieht, wenn A 23 Münzen hat und B eine. Weil es mit drei Würfeln 216 Würfe gibt, unter denen 15 die Punktsumme 14 und 27 die Punktsumme 11 ergeben,

so gibt es 15 Fälle, in denen A 24 Münzen, und 27 Fälle, in denen er 22 Münzen erhält; seine Erwartung in diesem Fall sei c . In den übrigen 174 Fällen behält er seine frühere Erwartung b . Daher ist

$$\frac{15a + 27c + 174b}{216} = b$$

oder

$$\frac{5a + 9c}{14} = b.$$

Genauso erhält man für c eine Gleichung

$$\frac{5b + 9d}{14} = c$$

usw. bis zur vorletzten und letzten Gleichung

$$\frac{5x + 9z}{14} = y$$

$$\frac{5y}{14} = z.$$

Die letzte, in die vorletzte Gleichung eingesetzt, ergibt

$$y = \frac{5}{14}x + \frac{45}{196}y$$

oder

$$\frac{151}{196}y = \frac{5}{14}x.$$

Das aus dieser Gleichung gewonnene y setzt man in die drittletzte Gleichung ein und fährt dann analog fort. Man erhält immer eine Unbekannte als Bruchteil der vorigen ausgedrückt und kommt so schließlich zu einer Gleichung von der Form

$$\frac{P}{Q}b = \frac{5}{14}a,$$

wo P/Q ein gewöhnlicher Bruch ist. In dieser Gleichung ist nunmehr a , der Einsatz, bekannt; man kann also b auflösen. Nun durchläuft man rückwärts die Kette der Gleichungen, indem man c durch b ausdrückt usw., bis zu n , der Erwartung von A in der Ausgangssituation. Die Erwartung von B ist dann $a - n$, und das Verhältnis der Erwartungen ist

$$n : (a - n) = 244140625 : 282429536481.$$

Bernoulli überlegt sich nun, ob er diese umständliche Rechnung nicht durch eine kürzere ersetzen kann. Zunächst macht er eine Näherung. Aus $z = 5y/14$ folgt

$$\frac{9}{14}z < \frac{5}{14}y,$$

also

$$\frac{5x + 9z}{14} = y < \frac{5x + 5y}{14}$$

oder, wenn auf beiden Seiten $5y/14$ subtrahiert wird,

$$\frac{9}{14} y < \frac{5}{14} x$$

oder $9y < 5x$. Genauso findet man $9x < 5w$ und $9w < 5v$ usw. Die Differenz zwischen den beiden Seiten wird relativ immer kleiner und schließlich unmerklich klein. Also kann man näherungsweise setzen $9n = 5m$, $9m = 5l$, $9l = 5k$ usw. bis $9b = 5a$. Daraus folgt

$$9^{12} \cdot n = 5^{12} \cdot a$$

oder $282429536481 n = 244140625 a$. Die Erwartung von A ist also genähert

$$n = \frac{244140625}{282429536481} a$$

und die von B

$$a - n = \frac{282185395856}{282429536481} a.$$

Bernoulli bemerkt nun, daß der genaue Wert von n etwas kleiner ist. Das genaue Verhältnis der Erwartungen von A und B , wie es sich aus der früheren Rechnung oder aus der Mitteilung von Huygens ergibt, ist nämlich nicht wie

244140625 zu 282185395856, sondern wie

244140625 zu 282429536481 oder wie

5^{12} zu 9^{12} .

Das kann man sich, sagt Bernoulli, auch folgendermaßen klarmachen: «Wenn A 23 Münzen hat, so hat er 15 Möglichkeiten, um a zu gewinnen; wenn aber B 23 Münzen hat, so hat er 27 Möglichkeiten, um a zu gewinnen. Wenn A 22 Münzen hat, so hat er 15 Möglichkeiten, um 23 Münzen, d. h. um die früheren 15 Möglichkeiten zu erhalten, also hat er 15 mal 15 Möglichkeiten, während B deren 27 mal 27 hat. Also werden, wenn beide Spieler 12 Münzen haben, ihre Chancen sich wie 15^{12} zu 27^{12} verhalten.»

Diese Überlegung, welche ich der Übersicht halber als zweite Lösung bezeichne, teilt uns Bernoulli auch in der *Ars Conjectandi* mit. Vorher zeigt er aber dort eine dritte Lösung: Er bezeichnet mit b und c die Anzahl der für A bzw. B günstigen Fälle in einem einzelnen Gang und setzt $a = b + c$. Er berechnet die Hoffnungen für A und B , wenn jeder Spieler nur 1, 2 oder 3 Münzen einsetzt. Dabei geht er wieder genau nach Huygens vor, indem er die gesuchte Hoffnung aus anderen Hoffnungen ableitet. Auch hier muß er sich der Analysis bedienen. Er findet bei je einer eingesetzten Münze als Verhältnis der Hoffnungen b zu c , bei je zwei Einsätzen b^2 zu c^2 und bei drei b^3 zu c^3 . Er schließt dann «durch Induktion weiter, daß bei beliebig vielen Münzen die Hoffnungen immer im Verhältnis der Potenzen von b und c stehen, deren Exponent gleich der Anzahl der Münzen ist, welche jeder Spieler anfänglich besitzt. Folglich verhalten sich in der vorliegenden Huygensschen Aufgabe, wo jeder Spieler 12 Münzen in seinem Besitze hat, die Hoffnungen von A und B zueinander wie

$$b^{12} : c^{12} = 5^{12} : 9^{12} = 244140625 : 282429536481,$$

wie Huygens angegeben hatte.» ([3.a], Band 107, S. 74)

Nun folgen auch in der *Ars Conjectandi* die Gedanken der zweiten Lösung, welche wir aus dem Tagebuch kennen. Bernoulli fährt dann fort: «Derjenige aber, welchem diese Berechnung noch nicht evident genug ist, und welcher auch den Induktionsschluß nicht als genügenden Beweis ansieht, kann durch ein ähnlich abkürzendes Verfahren, wie es Huygens bei Aufgabe XI benutzte, zum Ziele gelangen, indem er nämlich sofort zu dem Falle von 6 und von diesem zu dem von 12 Münzen übergeht, mit Nichtberücksichtigung aller dazwischenliegenden Fälle.»

Das ist so zu verstehen: Es werde zunächst um 3 Münzen gespielt. Das Verhältnis der Hoffnungen ist dann, wie es in der dritten Lösung berechnet wurde, $b^3 : c^3$. Dieses Spiel um 3 Münzen werde nun als einzelner Gang betrachtet, und es gelte einen Vorsprung von zwei Gängen zu schaffen. Es wird also um 6 Münzen gespielt. In diesem Spiel verhalten sich die Hoffnungen wie $b^3 \cdot b^3 : c^3 \cdot c^3 = b^6 : c^6$. Ein analoger Schritt führt zum Spiel um 12 Münzen und zum Verhältnis $b^{12} : c^{12}$. Das ist genau die Lösung, welche sich Huygens 1676 notiert hatte.

Vergleichen wir nun die vier Lösungswege. Eine Lücke ist allen Verfahren mit Ausnahme des zweiten eigen: Die Tatsache, daß die Summe der Erwartungswerte der beiden Spieler gleich dem ganzen Einsatz ist, wird wohl benützt, aber nicht bewiesen. Das läßt sich jedoch leicht nachholen, indem die Hoffnung des *B*, genau gleich wie die Hoffnung des *A*, direkt berechnet wird.

Der erste Lösungsweg ist im übrigen lückenlos, aber unelegant. Das gesuchte Verhältnis tritt hier nicht als 12. Potenz eines einfachen Bruches auf, sondern muß umständlich berechnet werden.

Beim dritten Verfahren wird der Erwartungswert bei 1, 2 und 3 Einsätzen einwandfrei ermittelt, mit Ausnahme der obenerwähnten Lücke. Der Induktionsschluß für eine höhere Zahl von Münzen ist jedoch nicht zwingend und läßt sich wahrscheinlich auch durch weitere Überlegungen nicht in Ordnung bringen.

Die vierte Lösung ist korrekt und elegant. Sie führt jedoch nicht zu einer Verallgemeinerung für beliebig viele Münzen.

Was nun das zweite Verfahren betrifft, geht weder aus dem Tagebuch noch aus der *Ars Conjectandi* eindeutig hervor, ob Bernoulli diese Überlegungen als zwingenden Beweis ansieht oder nicht. So, wie er sie schildert, erscheinen sie zunächst lückenhaft. Sie lassen sich aber leicht zu einem sauberen Beweis interpretieren: Denken wir uns die 24 Münzen in einer Linie angeordnet. Ein Zeiger gebe jeweils den Stand des Spiels an. Der Zeiger wird wahrscheinlich des öftern hin und her gerückt werden, ehe er einen Endpunkt erreicht. Unter allen möglichen, unendlich vielen Wegen gibt es je zwei symmetrische. Vergleichen wir nun zwei solche. Das Verhältnis ihrer Hoffnungen läßt sich stets in der Form $b^{12} b^t c^t : c^{12} b^t c^t$ darstellen. Alle Paare von symmetrischen Wegen haben somit das gleiche Verhältnis der Hoffnungen wie die beiden direkten Wege. Summieren wir nun die unendlich vielen Hoffnungen, so wie es Bernoulli auch bei Problem XIV ([3.a], S. 51) im Gegensatz zu Huygens getan hat, so bleibt das Verhältnis $b^{12} : c^{12}$ erhalten. Ob Bernoulli im Prinzip so überlegt hat, können wir wohl nicht mehr nachweisen; es erscheint mir jedoch wahrscheinlicher, als daß er seine Ausführungen ohne weiteres für plausibel hielt.

In der *Ars Conjectandi* schließt Bernoulli das Kapitel mit der Betrachtung eines allgemeineren Falles: Die Spieler setzen nicht mehr gleich viele Münzen ein, sondern A deren m und B deren n . Dann verhalten sich die Hoffnungen wie

$$\{b^n c^m - b^{m+n}\} : \{c^{m+n} - b^n c^m\}.$$

Den Beweis überläßt Bernoulli dem Leser, da er eine mühsamere Rechnung erforderte.

Jakob Bernoulli hat übrigens schon 1685, wahrscheinlich nicht lange nach der Tagebuchnotiz, das fünfte Problem von Huygens in eine Sammlung von Thesen und Problemen (*Parallelismus Ratiocinii Logici et Algebraici, Theses Miscellaneae XX*, siehe [4,a], Band 1, S. 270) aufgenommen, ohne indes auf Huygens Bezug zu nehmen. Um die erstaunliche Einseitigkeit des Spieles hervorzuheben, stellt er, sein didaktisches Geschick bezeugend, die Aufgabe so:

Sempronius will seinen Freunden Titius und Cajus 100 Taler schenken. Diese kommen überein, durch das vorliegende Würfelspiel zu entscheiden, wem das Geld zufallen soll. Cajus ist im Vorteil. Er verspricht daher, falls Titius siegt, diesem aus der eigenen Tasche zusätzliche 100 Taler zu bezahlen. Wie zu erwarten war, siegt Cajus. Titius fühlt sich hintergangen und bringt die Sache vor den Richter, der erklären muß, ob sie so unter gleichen Bedingungen gespielt hätten oder nicht. Bernoulli fährt fort: Wie wenige Richter werden glauben, daß Cajus ein Betrüger sei! Ich hingegen werde, wann immer sogar hundert gegen einen Taler niedergelegt werden, die Person des Titius unterstützen.

Wie haben nun die beiden andern Autoren, Montmort und de Moivre, diese fünfte Aufgabe von Huygens gelöst? Montmort wiederholt die Problemstellung in der ersten Ausgabe des *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* falsch, gibt aber eine richtige Lösung, nämlich die gleiche, wie sie Bernoulli als erste in sein Tagebuch geschrieben hat. Montmort sandte ein Exemplar seines Werkes an Johann Bernoulli und bat ihn um seine Stellungnahme. In der Antwort vom 17. März 1710 (siehe [6.2], S. 293) macht Johann Bernoulli Montmort unter anderem darauf aufmerksam, daß die von Huygens angegebenen Zahlen die 12. Potenzen von 5 und 9 sind. In der zweiten Ausgabe von 1713/14 bringt Montmort seine alte Lösung und schreibt dazu ([6.2], S. 223): «Il est à propos d'observer que la voye analytique n'est peut-être pas ici la meilleure, puisqu'on peut découvrir autrement que les sorts de Pierre et de Paul sont comme les douzièmes puissances des nombres 9 et 5, ainsi qu'il a été observé par Messieurs Bernoulli qui m'en ont averti dans leurs lettres du 17 Mars 1710, et 26 Février 1711, et depuis par M. Moivre dans son *Traité de Mensura Sortis*, qui parut l'année passée.»

Folgen wir nun den Gedanken de Moivres in Problem IX der *De Mensura Sortis* ([7.1], S. 227). Er überrascht uns mit einer seltsamen, aber höchst eleganten Lösung eines allgemeineren Problems. A habe die m Münzen $M_1 \dots M_m$, B die n Münzen $M_{m+1} \dots M_{m+n}$. Das Verhältnis der Primärchancen sei $a : b$. De Moivre ordnet nun den Münzen Gewichte zu, und zwar so, daß sich die Gewichte aufeinanderfolgender Münzen wie $b : a$ verhalten. Weiter schreibt er vor, daß immer um benachbarte Münzen gespielt wird, also zunächst um M_m und M_{m+1} , im zweiten Gang je nach dem Ausgang des ersten um M_{m-1} und M_m oder um M_{m+1} und M_{m+2} . So erreicht de Moivre, daß in

jedem Gang die Erwartungswerte für beide Spieler gleich sind. Damit ist auch der Erwartungswert im gesamten Spiel für beide Spieler derselbe. Er wird berechnet als das Produkt aus der Gewinnsumme und der Wahrscheinlichkeit, letztlich Sieger zu sein. Also verhalten sich die Siegeschancen umgekehrt proportional zu den Gewinnsummen und daher direkt proportional zu den eingesetzten Beträgen. Die Wahrscheinlichkeit, daß *A* alle Münzen gewinnt, verhält sich also zur Wahrscheinlichkeit, daß *B* alle Münzen gewinnt, wie

$$\left\{1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{m-1}}{a^{m-1}}\right\} : \left\{\frac{b^m}{a^m} + \cdots + \frac{b^{m+n-1}}{a^{m+n-1}}\right\} \\ = \frac{1 - (b/a)^m}{1 - (b/a)} : \frac{b^m}{a^m} \frac{1 - (b/a)^n}{1 - (b/a)} = a^n (a^m - b^m) : b^m (a^n - b^n) .$$

Dieses Verhältnis der Siegeschancen bleibt aber genau das gleiche, wenn die Münzen anders oder überhaupt nicht gewichtet werden.

Die fünfte Aufgabe von Huygens ist nur ein Spezialfall dieses von de Moivre mit wenig Rechenarbeit gelösten Problems. Ein anderer Spezialfall wird von Montmort auf Seite 178 seiner ersten Ausgabe geschildert: Montmort hatte zwei Spieler beobachtet, die «en rabattant» spielten. Zu einem Sieg war ein Vorsprung von 6 Partien nötig. Als nach 30 oder 40 Gängen immer noch kein Sieger erkoren war, entschlossen sich die Spieler, den Einsatz zu halbieren, obwohl zu jenem Zeitpunkt einer dem andern drei Partien voraus war. Montmort berechnet nun, wie man bei den verschiedenen Spielständen den Einsatz hätte teilen müssen:

- Wenn Pierre 1 Punkt hat, so ist sein Vorteil 7:5.
- Wenn Pierre 2 Punkte hat, so ist sein Vorteil 2:1.
- Wenn Pierre 3 Punkte hat, so ist sein Vorteil 3:1.
- Wenn Pierre 4 Punkte hat, so ist sein Vorteil 5:1.
- Wenn Pierre 5 Punkte hat, so ist sein Vorteil 11:1.

Johann Bernoulli schreibt am 17. März 1710 ([6.2], S. 296) in seiner Stellungnahme zum *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* an Montmort, daß bei *n* zu gewinnenden Spielen folgende Tabelle gelte:

Vorsprung Pierres	Verhältnis der Chancen
0 Partien	<i>n</i> : <i>n</i>
1	<i>n</i> + 1 : <i>n</i> - 1
⋮	⋮
⋮	⋮
<i>n</i>	<i>n</i> + <i>n</i> : <i>n</i> - <i>n</i>

Weder Montmort noch Bernoulli geben einen Beweis für diese Angaben, welche aus de Moivres Lösung sogleich folgen.

Im Jahre 1716 veröffentlichte Nicolaas Struyck in Amsterdam eine Abhandlung unter dem Titel *Uytreening der Kansen in het speelen, door de Arithmetica en Algebra, beneevens eene Verhandeling van Looterijen en Interest*. Auf den Seiten 40–45 und

108–111 behandelt er das fünfte Problem von Huygens. Er geht dabei von Gleichungen aus, wie sie Jakob Bernoulli für seine erste, mühsame Lösung niedergeschrieben hatte. Struyck löst jedoch diese Gleichungen sehr elegant auf, indem er die Feststellung benützt, daß die Differenzen der Unbekannten eine geometrische Reihe bilden. Damit wollen wir die Diskussion der verschiedenen Lösungen der fünften Aufgabe von Huygens beschließen und uns dem Problem der Spieldauer zuwenden. Die Ausgangssituation ist hier dieselbe; gefragt wird jedoch nicht nach dem Verhältnis der Gewinnchancen, sondern nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Dauer des Spiels.

SPIELDAUER; DIE LÖSUNGEN VON MONTMORT UND NIKLAUS BERNOULLI

P. R. de Montmort ist unseres Wissens der erste, der nicht nur die Ausgangssituation für die Frage nach der Dauer von Spielen schilderte, sondern diese Frage auch explizit stellte und zu beantworten versuchte. Von einem andern Problem ausgehend, löst er in einem Korollar den Spezialfall, daß beide Spieler gleiche Primärchancen haben und je drei Münzen einsetzen ([6.1], S. 184):

In der Reihe

$$\frac{1}{4} + \frac{3^1}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} + \cdots$$

betrifft das erste Glied die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel im dritten Gang fertig wird; die Summe der ersten beiden Glieder die Wahrscheinlichkeit für den Spielschluß innerhalb der ersten fünf Gänge usw.

Abschließend bemerkt Montmort: «On trouvera sans beaucoup de peine des formules pareilles pour les autres cas, et l'on en trouvera la recherche assez curieuse.» In dieser Annahme hat sich Montmort allerdings getäuscht. Solch einfache, nämlich geometrische Reihen lassen sich nur anwenden, wenn nicht mehr als drei Münzen eingesetzt werden. Das Problem beschäftigt daher Montmort weiter. Er schreibt am 15. November 1710 an Johann Bernoulli ([6.2], S. 306):

«C'est un Problème qui pourroit exciter votre curiosité, que celui où il s'agit de déterminer combien doit durer la partie lorsqu'on joue en rabattant. J'ai donné dans le Corollaire, page 184, la solution du cas où l'on joueroit en trois parties de Piquet: j'ai la solution generale de ce Problème. Je vous l'envoierois si je croyois qu'elle vous fist plaisir. Monsieur votre neveu, qui me paroît capable par son habileté des choses les plus difficiles, et qui par dessus cela est jeune et a peut-être du loisir, devoit en chercher la solution qui est assurément digne de lui.»

Der Neffe, Niklaus Bernoulli, nimmt die Anregung an und sendet schon am 26. Februar 1711 die Lösung des allgemeinen Problems an Montmort! Er ist sich seiner hervorragenden Leistung bewußt. Er schreibt ([6.2], S. 309):

«Le Probleme que Vous proposez sur les Jeux qui se jouent en plusieurs parties en rabattant, est fort difficile; néanmoins voyant que Vous souhaitez que j'en cherche la solution, je m'y suis appliqué, et j'ai trouvé une règle generale pour exprimer le sort de celui qui parieroit qu'un des Joueurs aura gagné en tel nombre de coups qu'on voudra, soit qu'ils jouent à un jeu égal ou inégal, soit que l'un ait déjà gagné quelques parties ou non: la voici en peu de mots: Soient les deux Joueurs Pierre et Paul, le nombre des parties qui manquent à Pierre = m , le nombre des parties qui manquent à Paul = n , leur somme = $m + n = s$, le nombre des cas favorables à Pierre = p , le nombre des cas favorables à Paul = q , leur somme = $p + q = r$, le nombre des coups

$= h = m + 2k$, le nombre de fois que s est contenu dans $k = t$; cela posé, je dis que la difference entre la somme de toutes les valeurs possibles (c'est à dire en mettant pour t toutes les valeurs qu'il peut avoir depuis 0 jusqu'au plus grand) de cette suite

$$1 \{p^{2k-2ts} + q^{2k-2ts}\} + h \{p^{2k-2ts-1}q + q^{2k-2ts-1}p\} \\ + \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2} \{p^{2k-2ts-2}qq + q^{2k-2ts-2}pp\} + \frac{h(h-1)(h-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \{p^{2k-2ts-3}q^3 \\ + q^{2k-2ts-3}p^3\} + \text{etc. jusqu'à } \frac{h(h-1)(h-2) \dots (h-k+ts+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-ts)} (pq)^{k-ts}$$

le tout multiplié par $p^{ts+m} q^{ts/r^h}$, et la somme de toutes les valeurs de celle-ci

$$1 \{p^{2k-2ts-2n} + q^{2k-2ts-2n}\} + h \{p^{2k-2ts-2n-1}q + q^{2k-2ts-2n-1}p\} \\ + \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2} \{p^{2k-2ts-2n-2}qq + q^{2k-2ts-2n-2}pp\} + \text{etc. jusqu'à} \\ \frac{h(h-1)(h-2) \dots (h-k+ts+n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-ts-n)} (pq)^{k-ts-n}, \text{ le tout multiplié}$$

par $p^{ts+s} q^{ts+n/r^h}$, exprimera le sort de celui qui parieroit que Pierre gagnera la partie au moins en h coups. Si k est plus petit que $ts + n$; c'est à dire, si après avoir divisé k par s , le reste de la division est plus petit que n , il ne faut pas dans la dernière suite mettre pour t toutes ses valeurs depuis 0 jusqu'à t , mais seulement jusqu'à $t - 1$. Pour avoir le sort de celui qui parieroit que Paul la gagnera en h coups, il ne faudra que substituer dans cette formule les lettres q, p, n, m au lieu de p, q, m, n . La somme de ces deux sorts ensemble sera le sort de celui qui parieroit que la partie sera décidée en h coups.»

Diese Formel ist ganz allgemein und richtig. Nur in einem Punkt weist sie eine Zweideutigkeit auf: Das Zeichen t wird sowohl für eine feste Zahl als auch für den zwischen 0 und t laufenden Index verwendet. Die jeweilige Bedeutung wird jedoch aus dem Zusammenhang durchaus klar. Den Beweis teilt Niklaus Bernoulli nicht mit. Wir werden im Zusammenhang mit den Arbeiten von de Moivre auf diese Lösung zurückkommen.

Montmort versteht zunächst die Lösung von Niklaus Bernoulli nicht. Er schreibt ihm am 10. April 1711 ([6.2], S. 315): «J'admire vostre formule pour la durée des parties que l'on joue en rabattant; je sens qu'elle est tres juste, mais je suis forcé de vous dire que je ne l'entens point.»

Er bittet ihn daher, zum besseren Verständnis die Formel auf ein Beispiel anzuwenden. Weiter gibt er ihm zur Kontrolle einige eigene Ergebnisse für den Fall gleicher Primärchancen und gleich hoher Einsätze. Er fährt dann fort ([6.2], S. 316): «Au reste vostre formule m'étonne pour sa generalité; je vois que vous en tirez le mieux du monde le Problème cinquième de M. Huygens, et celui de la page 178.»

Daß die Gedanken über dieses Problem noch viel weiter führen sollten, konnte Montmort natürlich nicht voraussehen.

In seinem nächsten Brief erklärt Niklaus Bernoulli seine Formel für den Fall gleicher

Primärchancen, also für $p = q = 1/2$. Die Rechnungsarbeit beschränkt sich dann im wesentlichen auf eine Summation von Zahlen aus dem Pascalschen Zahlendreieck. Dieses hat aber auch Montmort zur Lösung des Spezialfalles gleicher Chancen und Einsätze benutzt. Für diesen Fall stimmen somit die Lösungen der beiden Mathematiker überein. Montmort versteht nun auch die Methode, die Bernoulli für den allgemeinen Fall anwendet. Es entspricht jedoch kaum den Tatsachen, wenn er in der zweiten Ausgabe seines Buches den Leser glauben läßt, er hätte die Lösung des allgemeinen Falles selbständig gefunden und nachträglich einfach die Übereinstimmung mit Bernoulli festgestellt ([6.2], S. 275).

Die Formel, die Montmort auf Seite 268 der zweiten Ausgabe angibt, enthält übrigens einen Fehler. Wollte man ihr folgen, so würde man in den verschiedenen Reihen je ein Glied zuviel einsetzen. Aus dem darauffolgenden Beispiel wird jedoch die richtige Lösung ersichtlich. Montmort gibt auch einen Beweis für seine Formel. Die Beweis-idee als Ganzes ist gut. An einer Stelle macht Montmort jedoch einen Überlegungsfehler, auf den ich im nächsten Kapitel zurückkommen werde.

Inzwischen hatte auch Abraham de Moivre das Problem der Spieldauer aufgegriffen. In seiner Abhandlung *De Mensura Sortis* vom Jahre 1711 widmet er ihm ein ganzes Kapitel mit der Überschrift *De Duratione Ludorum* und zeigt eine völlig andere Lösung. Montmort schreibt darüber an Niklaus Bernoulli am 5. September 1712 ([6.2], S. 368): «Le reste du livre contient sept propositions sur une matiere extremement curieuse à laquelle j'ay pensé le premier; sçavoir combien doit durer un jeu où l'on joue toujours en rabattant.»

Im übrigen zeigt sich Montmort leicht verärgert über de Moivres Arbeit, die sich im wesentlichen auf den *Essay d'Analyse* stütze und kaum Neues enthalte ([6.2], S. 362) und einige Seiten später bemerkt er (S. 369): «Il m'a paru d'abord fort singulier qu'il, l'ait rempli des memes choses dont nous nous sommes entretenus dans nos lettres; mais il est naturel qu'ayant fait son Ouvrage sur le mien, et voulant pousser ces matieres, les memes idées luy soient venues qu'à nous. J'aurois seulement souhaité, et il me semble que l'équité le demandoit, qu'il eust reconnu avec franchise ce que j'ay droit de revendiquer dans son Ouvrage.»

Was das Problem der Spieldauer betrifft, sei hierzu zusammenfassend festgehalten, daß Montmort das Problem als erster aufgeworfen, selbst aber nur den Spezialfall gleicher Primärchancen gelöst hat, wobei er wahrscheinlich sogar noch gleich hohe Einsätze voraussetzte.

SPIELDAUER; DIE RATIONALEN LÖSUNGEN VON DE MOIVRE

Von nun an wenden wir unsere Aufmerksamkeit fast ausschließlich Abraham de Moivre zu, dem sich das Problem der Spieldauer als äußerst fruchtbar erwies. Ich erachte es daher als gegeben, hier einige biographische Notizen einzufügen.

Abraham de Moivre wurde am 26. Mai 1667 in Vitry in der Champagne als Sohn eines protestantischen Wundarztes geboren. Seine sorgfältige Erziehung fand ein jähes Ende, als er nach der Aufhebung des Ediktes von Nantes im Jahre 1685 eingekerkert wurde. Wieder freigelassen, floh er 1688 nach London. Bis zu seinem Tode im Jahre 1754 mußte sich dort der hochgebildete Emigrant seinen Lebensunterhalt sehr mühsam durch Privatunterricht verdienen. Dies, obwohl er mit den größten Mathematikern seiner Zeit in lebhafter Verbindung stand, mit Newton befreundet war und sich schon seit 1697 zu den Mitgliedern der Royal Society zählen durfte, eine Ehre, die ihm nach der Herausgabe der *Miscellanea analytica* auch die Akademie in Berlin und, einige Monate vor seinem Tode, sogar die Académie des Sciences seines Heimatlandes erwiesen.

Trotz seiner mathematischen Leistungen blieb seine Zuneigung zu andern Wissensgebieten lebendig. So soll er ganze Szenen aus Molière zitiert und eines Tages sogar einem Freund ins Ohr geflüstert haben, «qu'il eût mieux aimé être ce célèbre Comique que Newton» ([5.2], 1754, S. 184).

Die wichtigsten Arbeiten de Moivres betreffen die Fluxionsrechnung, unendliche Reihen und vor allem die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Folgen wir nun seinen Gedanken zur Spieldauer, wie er sie in der *Doctrine of Chances* im Kapitel *Of the Duration of Play* dargestellt hat. Ich halte mich dabei an die 1738 erschienene zweite Auflage ([8.2], S. 162ff.).

De Moivre baut das Kapitel lehrbuchmäßig auf. Nach der Formulierung des Problems folgt die Bemerkung: 'This Problem having some difficulty... I think it necessary to begin with the simplest cases of this Problem, in order to bring the Reader by degrees to a general Solution of it.'

In einem ersten Fall gibt er jedem Spieler zwei Münzen. Ihre Primärchancen verhalten sich wie a zu b . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach 2 Gängen weitergeht?

Um die Lösung zu finden, potenziere man $a + b$ mit 2. Das gibt $a^2 + 2ab + b^2$. Hierin betreffen a^2 und b^2 das Spielende, $2ab$ die Fortdauer des Spiels. Die Wahrscheinlichkeit der Fortdauer ist somit $2ab/(a + b)^2$.

Ich werde im folgenden $a + b = 1$ setzen, was de Moivre nie tut, aber die Rechnung vereinfacht. Im zweiten Fall hat wieder jeder Spieler 2 Münzen; gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach 3 Gängen weitergeht. De Moivre kommt

zum selben Resultat wie im ersten Fall und erklärt nachher, daß das auch so sein muß, denn eine gerade Anzahl von Münzen kann nicht in einer ungeraden Anzahl von Gängen gewonnen werden und umgekehrt.

Im dritten Fall geht es um die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach 4 Gängen noch weitergeht. Zur Lösung potenziert man $a + b$ mit 4, was $a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + b^4$ gibt. a^4 , $4 a^3 b$, $4 a b^3$ und b^4 betreffen das Spielende, $6 a^2 b^2$ teils Beendigung, teils Fortdauer des Spiels. Wenn wir den Term $6 a^2 b^2$ in seine Teile $a a b b$, $a b a b$, $a b b a$, $b a a b$, $b a b a$, $b b a a$ zerlegen, so sehen wir, daß der erste und der letzte Ausdruck das Ende des Spieles bedeuten. Die Wahrscheinlichkeit des Spielfortgangs ist also $4 a^2 b^2$.

Im vierten Fall berechnet de Moivre die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach dem $(2 + d)$ -ten Gang weitergeht, womit er schon eine gewisse Verallgemeinerung erreicht hat. Im fünften Fall tut er dasselbe für 3 Münzen Anfangskapital. Diese beiden Formeln entsprechen denjenigen, welche Montmort auf Seite 184 seiner ersten Auflage angegeben hat. Sie lassen sich nicht für eine größere Anzahl von Münzen verallgemeinern. Deshalb führt uns de Moivre auf Seite 165 einen neuen Weg ([8.2], S. 165): 'Let n be the number of Pieces of each Gamester. Let also $n + d$ be the number of Games given; raise $a + b$ to the Power n , then cut off the two extreame Terms, and multiply the remainder by $a a + 2 a b + b b$; then cut off again the two Extreame, and multiply again the remainder by $a a + 2 a b + b b$, still rejecting the two Extreame, and so on, making as many Multiplications as there are Units in $\frac{1}{2} d$; let the last Product be the Numerator of Fraction whose Denominator be $(a + b)^{n+d}$, and that Fraction will express the Probability required, ... still observing that if d be an odd number, you write $d - 1$ in its room.'

De Moivre gibt keinen Beweis zu dieser Methode. Sie wird jedoch aus dem Vorangehenden einleuchtend. Montmort ist allerdings anderer Meinung, wenn er an Niklaus Bernoulli schreibt ([6.2], S. 369): «Je suis fort en peine de sçavoir comment ce sçavant Geometre est parvenu à cette methode.»

De Moivre gibt zwei Beispiele, deren eines ich vorführen will:

4 sei die Anzahl der Münzen jedes Spielers, 10 die Anzahl der Gänge. Es ist also $n = 4$, $n + d = 10$, $d = 6$. De Moivre benutzt folgende Darstellung:

$$\begin{array}{r}
 a^4 \mid + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 \mid + b^4 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 a^2 \quad + 2 a b \quad + b^2 \\
 4 a^5 b \mid + 6 a^4 b^2 + 4 a^3 b^3 \\
 \quad + 8 a^4 b^2 + 12 a^3 b^3 + 8 a^2 b^4 \\
 \quad \quad + 4 a^3 b^3 + 6 a^2 b^4 + \mid 4 a b^5 \\
 \hline
 14 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 14 a^2 b^4 \\
 a^2 \quad + 2 a b \quad + b^2 \\
 \hline
 14 a^6 b^2 \mid + 20 a^5 b^3 + 14 a^4 b^4 \\
 \quad + 28 a^5 b^3 + 40 a^4 b^4 + 28 a^3 b^5 \\
 \quad \quad + 14 a^4 b^4 + 20 a^3 b^5 + \mid 14 a^2 b^6
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
48 a^5 b^3 + 68 a^4 b^4 + 48 a^3 b^5 \\
a^2 \quad + \quad 2 a b \quad + b^2 \\
\hline
48 a^7 b^3 \mid + 68 a^6 b^4 + 48 a^5 b^5 \\
\quad + 96 a^6 b^4 + 136 a^5 b^5 + 96 a^4 b^6 \\
\quad \quad + 48 a^5 b^5 + 68 a^4 b^6 + \mid 48 a^3 b^7 \\
\hline
164 a^6 b^4 + 232 a^5 b^5 + 164 a^4 b^6
\end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach 10 Gängen noch andauert, ist somit $164 a^6 b^4 + 232 a^5 b^5 + 164 a^4 b^6$, was für gleiche Primärchancen den Wert $560/1024 = 35/64$ ergibt.

De Moivre bemerkt noch, daß man die Buchstaben a und b für die Ausrechnung weglassen und sie einfach mit den entsprechenden Exponenten am Schluß wieder einsetzen kann.

Dem Inhalt nach ist das Bisherige schon in der Abhandlung *De Mensura Sortis* enthalten. Nun aber folgen neue Entdeckungen.

Im Problem LVIII fragt de Moivre umgekehrt nach der Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel innerhalb von $n + d$ Gängen fertig wird. Es gibt 4 Lösungswege:

1.

Zunächst ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit natürlich die Gegenwahrscheinlichkeit zur soeben errechneten.

2.

In der vorangehenden Aufgabe haben wir Terme weggestrichen. Diese Terme geben jeweils die Wahrscheinlichkeit an, daß das Spiel im entsprechenden Gang fertig wird. Wir haben somit nur diese Terme zu addieren. In unserem Beispiel gibt das

$$\begin{aligned}
& a^4 + b^4 + 4 a^5 b + 4 a b^5 + 14 a^6 b^2 + 14 a^2 b^6 + 48 a^7 b^3 + 48 a^3 b^7 \\
& = (a^4 + b^4) (1 + 4 a b + 14 a^2 b^2 + 48 a^3 b^3) .
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Terme im zweiten Faktor der rechten Seite ist gleich der Anzahl der Einheiten in $\frac{1}{2} d + 1$.

3.

De Moivre stellt Gesetzmäßigkeiten unter den Koeffizienten fest: Benennen wir in unserem Beispiel irgend drei aufeinanderfolgende Koeffizienten mit L , M , N , so gilt die Beziehung $N = 4 M - 2 L$. Im obigen Klammerausdruck wäre also der nächstfolgende Koeffizient $4 \cdot 48 - 2 \cdot 14 = 164$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel genau im 12. Gang fertig wird, ist daher $(a^4 + b^4) \cdot 164 a^4 b^4$. Die Art der Beziehung hängt von der Zahl der eingesetzten Münzen ab. De Moivre gibt folgende Regel an, ohne einen Beweis auch nur anzudeuten:

Sei n die Zahl der Münzen, die jeder Spieler einsetzt. Dann enthält jeder Koeffizient

$$\begin{aligned}
& n \text{ mal den letzten,} \\
& - n \frac{n-3}{2} \text{ mal den vorletzten,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ n \frac{n-4}{2} \cdot \frac{n-5}{3} \text{ mal den drittletzten,} \\
 &\quad n \frac{n-5}{2} \cdot \frac{n-6}{3} \cdot \frac{n-7}{4} \text{ mal den viertletzten,} \\
 &\text{usw.}
 \end{aligned}$$

In unserem Beispiel war $n = 4$; daraus folgt die schon oben genannte Beziehung $N = 4M - 2L$. Für $n = 6$ erhält man die Zahlen 6, -9, 2 und damit die Beziehung $N = 6M - 9L + 2K$.

4.

Der Koeffizient des Terms, der die Wahrscheinlichkeit betrifft, daß das Spiel im $(n + d)$ -ten Gang endet, kann auch ohne Kenntnis der vorhergehenden Koeffizienten berechnet werden. De Moivre schreibt auf Seite 170:

'I say that the Coefficient of that Term will be

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+d-1}{2} \cdot \frac{n+d-2}{3} \cdot \frac{n+d-3}{4} \cdot \frac{n+d-4}{5} \&c.$$

continued to so many Terms as there are Units in $\frac{1}{2}d$

$$- \frac{3n}{1} \cdot \frac{n+d-1}{2} \cdot \frac{n+d-2}{3} \cdot \frac{n+d-3}{4} \cdot \frac{n+d-4}{5} \&c.$$

continued to so many Terms as there are Units in $\frac{1}{2}d - n$.

$$+ \frac{5n}{1} \cdot \frac{n+d-1}{2} \cdot \frac{n+d-2}{3} \cdot \frac{n+d-3}{4} \cdot \frac{n+d-4}{5} \&c.$$

continued to so many Terms as there are Units in $\frac{1}{2}d - 2n \&c.'$

Dabei ist folgendes zu beachten:

a) Wenn $\frac{1}{2}d - kn = 0$, dann ist das ganze entsprechende Produkt durch 1 zu ersetzen.

b) Wenn $\frac{1}{2}d - kn < 0$, dann ist dieses Produkt und alle folgenden gleich Null zu setzen.

Als Beispiel berechnet de Moivre die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel, in dem jeder Spieler 6 Münzen einsetzt, im 20. Gang aufhört. Es ist $n = 6$, $n + d = 20$,

$$\begin{aligned}
 &\frac{6}{1} \cdot \frac{19}{2} \cdot \frac{18}{3} \cdot \frac{17}{4} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{14}{7} = 23256 \\
 &- \frac{3 \cdot 6}{1} = \frac{-18}{23238}
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $23238 a^7 b^7 (a^6 + b^6)$.

Diese beiden Formeln überraschen uns. Wie kann man sie herleiten? Möglicherweise hat sie de Moivre für einfache Beispiele entdeckt und dann so formuliert, daß sie allgemein gültig sind. Das Verfahren der unvollständigen Induktion wurde damals häufig gebraucht, obwohl z. B. Jakob Bernoulli darauf hingewiesen hatte, daß es nicht

als strenge Beweisführung betrachtet werden kann. In der *Théorie Analytique des Probabilités* von Laplace finden wir einen analytischen Beweis. Die Formel zur Berechnung der Glieder auf direktem Wege kann aber auch mit rein kombinatorischen Mitteln bewiesen werden. Dabei denkt man mit Vorteil im physikalischen Bild des Problems: Vom Ballot-Theorem ausgehend, gelangt man mit Hilfe des Dualitätsprinzips zum Problem des erstmaligen Durchgangs und von hier aus unter Anwendung des Spiegelungsprinzips zur vorliegenden Aufgabe. Da dies in der einschlägigen Literatur nachgelesen werden kann (z. B. [15], Kap. III, XI und XIV) und für die weitere Entwicklung der Arbeit nicht wesentlich ist, beschränke ich mich hier auf eine qualitative Betrachtung. Ich bediene mich dabei des Pascalschen Zahlendreiecks (PZ). Ob wohl de Moivre auch damit gearbeitet hat? Er erwähnt es weder in der *Doctrine of Chances* noch in der *Miscellanea analytica* im Zusammenhang mit der Spieldauer. Montmort und Niklaus Bernoulli hingegen brauchen es beide für ihre Lösungen, allerdings in anderer Weise, als wir es nun tun wollen.

Wir legen das PZ so auf Figur 1, daß auf jede Kreuzung und nur auf diese eine Zahl zu liegen kommt. Insbesondere soll die oberste 1 mit dem Start der Irrfahrt zusammenfallen. Betrachten wir nun eine bestimmte Kreuzung K . Jeder Weg vom Start nach K besteht aus r rechtsgerichteten und l linksgerichteten Teilstrecken. Die Zahl des PZ, welche auf K steht, gibt die Anzahl der möglichen Wege an. Die Wahrscheinlichkeit, diese Kreuzung zu passieren, ist das Produkt aus dieser Zahl und der Größe $a^r b^l$.

In unserem Problem ist aber die Wahl der Wege eingeschränkt. Die Fahrt wird abgebrochen, wenn sie zu weit nach links oder rechts führt. Wir müssen deshalb das PZ abändern. Das soll an einem speziellen Beispiel gezeigt werden. Die Fahrt werde abgebrochen, wenn der Fahrer vier Wegeinheiten von der Mitte abgewichen ist. In der Sprache des Spiels hieße das, daß ein Spieler gewonnen hat, wenn er dem Gegner vier Münzen abnehmen konnte. Es ist also $n = m = 4$. Die abgeänderte Form des PZ sieht so aus:

			1			
			1	1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
1	4	6	4	1		
	4	10	10	4		
4	14	20	14	4		
	14	34	34	14		
14	48	68	48	14		
	48	116	116	48		
48	164	232	164	48		
	164	396	396	164		
164					164	

Kursivschrift eines Terms bedeutet Ende der Fahrt. Betrachten wir nun die rechte Seite unseres Schemas. Auf einem der Wege erreicht man schon nach vier Teilstrecken die Grenze. Links unterhalb des Endpunktes steht im PZ die Zahl 5. Einer der Wege dorthin ist nun aber unmöglich geworden, also muß dort 4 stehen. Ganz allgemein dürfen zur Aufstellung des abgeänderten PZ die *kursiv gedruckten* Terme nicht mehr addiert werden.

Im vollständigen PZ haben die *kursiv gedruckten* Terme (z. B. der μ -te, mit $d = 2\mu$) die Form

$$\binom{n+d}{\frac{d}{2}} = \frac{n+d}{1} \cdot \frac{n+d-1}{2} \cdot \frac{n+d-2}{3} \cdots \frac{n+(d/2)+1}{d/2}.$$

In der Formel von de Moivre steht als erster Summand

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+d-1}{2} \cdot \frac{n+d-2}{3} \cdots \frac{n+(d/2)+1}{d/2}.$$

Er stimmt bis auf den ersten Faktor mit dem Pascalschen Koeffizienten überein. Er muß kleiner sein als dieser, weil alle Wege, welche schon vorher zu weit nach rechts führen, wegfallen. Für die ersten n *kursiv* gedruckten Terme genügt der erste Summand. Nachher aber muß eine Größe abgezogen werden, und das deshalb, weil nun auch Wege wegfallen, welche zu weit nach links führen. So ist z. B.

$$4 \cdot \frac{4+8-1}{2} \cdot \frac{4+8-2}{3} \cdot \frac{4+8-3}{4} = 4 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{4} = 165.$$

Einer dieser 165 Wege führt aber zu weit nach links. Deshalb steht in unserem Schema 164. Weiter unten muß man einen Teil des Abzuges rückgängig machen. Es gibt nämlich Wege, die nacheinander zu weit nach rechts, zu weit nach links und wieder zu weit nach rechts führen. Durch solche Überlegungen lassen sich alle positiven und negativen Summanden wenigstens qualitativ begründen.

Die hier besprochenen Lösungen betreffen nicht das ganz allgemeine Problem. De Moivre löst die Aufgabe auch für ungleich hohe Einsätze der Spieler. Der Lösungsweg ist im wesentlichen derselbe, aber bedeutend komplizierter (siehe Probleme LXII und LXIII in [8.2], S. 173 ff.).

Daraufhin gibt er einem Spieler sogar unbegrenzt hohes Anfangskapital, während sich der andere weiterhin mit n Münzen begnügen muß. Im physikalischen Modell handelt es sich hier um das Problem des erstmaligen Durchgangs. De Moivre gibt zwei Lösungen, deren Gegenüberstellung eine tiefere Einsicht in die Frage der Spieldauer erlaubt. Die eine läßt sich aus dem Bisherigen leicht herleiten ([8.2], S. 181): Die Wahrscheinlichkeit, daß B bis zum $(n+d)$ -ten Gang alle seine n Münzen an seinen unendlich reichen Gegner verloren hat, ist

$$a^n \left\{ 1 + n a b + \frac{n(n+3)}{2!} a^2 b^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!} a^3 b^3 + \cdots \right. \\ \left. + \frac{n(n+(d/2)+1) \cdots (n+d-1)}{(d/2)!} a^{d/2} b^{d/2} \right\}.$$

Wenn d ungerade ist, so ist es wieder durch $d - 1$ zu ersetzen.

Besitzt also z. B. ein Spieler anfangs drei Münzen und spielt er ebenso gut wie sein unendlich reicher Gegner, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß er schon nach 10 Gängen ruiniert ist,

$$\frac{1}{8} \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{28}{64} \right) = \frac{11}{32}.$$

Die andere Lösung beschreibt de Moivre wie folgt (S. 179): 'Supposing n to be the number of Stakes which A is to win of B , and $n + d$ the number of Games; let $a + b$ be raised to the Power whose Index is $n + d$; then if d be an odd number, take so many Terms of that Power as there are Units in $(d + 1)/2$; take also so many of the Terms next following as have been taken already, but prefix to them in an inverted order, the Coefficients of the preceding Terms. But if d be an even number, take so many Terms of the said Power as there are Units in $1/2 d + 1$; then take as many of the Terms next following as there are Units in $1/2 d$, and prefix to them in an inverted order the Coefficients of the preceding Terms, omitting the last of them; and those Terms taken all together will compose the Numerator of a Fraction expressing the Probability required, the Denominator of which Fraction ought to be $(a + b)^{n+d}$.'

De Moivre löst dann das Beispiel $n = 3$, $n + d = 10$:

$$(a + b)^{10} = a^{10} + 10 a^9 b + 45 a^8 b^2 + 120 a^7 b^3 + 210 a^6 b^4 + 252 a^5 b^5 \\ + 210 a^4 b^6 + 120 a^3 b^7 + 45 a^2 b^8 + 10 a b^9 + b^{10}.$$

Die ersten 4 Terme sind $a^{10} + 10 a^9 b + 45 a^8 b^2 + 120 a^7 b^3$, die nächsten 4 mit den modifizierten Koeffizienten $120 a^6 b^4 + 45 a^5 b^5 + 10 a^4 b^6 + a^3 b^7$.

Als Summe aller dieser Terme erhalten wir für $a = b = 1/2$ den Wert $352/1024 = 11/32$, wie oben.

Versuchen wir nun, die beiden Lösungen zu durchschauen. Das ist am besten anhand der Irrfahrt möglich:

In der ersten Lösung wird die Fahrt unterbrochen, sobald die Grenze überschritten ist. Das Resultat erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten für diese Grenzverletzungen addiert.

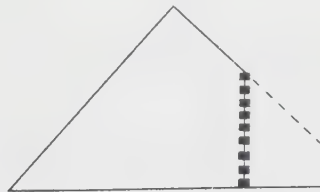


Fig. 2

In der zweiten Lösung läßt man die Fahrt fortsetzen. Am Schluß betrachtet man dann alle möglichen Wege und liest diejenigen heraus, welche mindestens einmal die Grenze überschritten haben. In unserem Beispiel betreffen die ersten 4 Terme die Wege, die

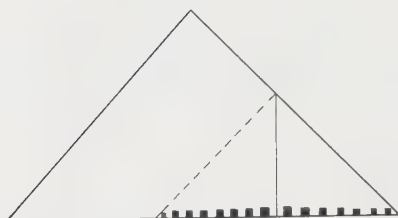


Fig. 3

nach 10 Teilstrecken rechts der Grenze enden; die übrigen 4 Terme hingegen beziehen sich auf diejenigen Wege, welche wohl über die Grenze, aber auch wieder zurückführen. Die entsprechenden Koeffizienten erhalten wir aus einer Symmetrieüberlegung. Hat nämlich ein Weg die Grenze erreicht, so bestehen genau gleich viele Möglichkeiten, ihn nach einer gewissen Anzahl von Teilstrecken links oder rechts dieser Grenze enden zu lassen.

Montmort mußte für seine Lösung des Problems diese Koeffizienten ebenfalls bestimmen. Er studierte dazu die Aufeinanderfolge von Siegen und Niederlagen in den einzelnen Gängen. Nehmen wir den Term $10 a^4 b^6$ in unserem Beispiel. Er betrifft die Wahrscheinlichkeit, daß A viermal gewinnt und sechsmal verliert und dabei einmal einen Vorsprung von drei Siegen erreicht. Montmort sagt nun, daß das nur möglich sei, wenn alle Niederlagen mit Ausnahme einer einzigen nach den Siegen kommen. Das ist aber nicht richtig, denn wenn am Anfang drei Siege stehen, so können dem letzten Sieg beliebig viele Niederlagen vorangehen. Trotzdem erhält Montmort, wie schon früher erwähnt, das richtige Resultat, was nur dadurch möglich wird, daß er identische Fälle zweimal zählt.

Todhunter bemerkt, daß die Überlegungen Montmorts falsch sind, kann aber die Richtigkeit der Formel nur für einfache Zahlenbeispiele wie das unsere nachweisen. Nikolaus Bernoulli und de Moivre geben das Resultat ohne Beweis. Der obige einfache Beweis mit der Symmetrieüberlegung zeigt, wie gut das erst im 19. Jahrhundert eingeführte Modell von der Irrfahrt im Straßennetz unserem Problem entspricht.

Im Anschluß an das eben besprochene Problem LXIV schreibt de Moivre ([8.2], S. 181):

'In the first attempt that I had ever made towards solving the general Problem of the Duration of Play, which was in the Year 1708, I began with the Solution of this LXIVth Problem, well knowing that it might be a Foundation for what I further wanted, since which time, by a due repetition of it, I solved the main Problem; but as I found afterwards a nearer way to it, I barely published, in my first Essay on those matters, what seemed to me most simple and elegant, still preserving this Problem by me in order to be published when I should think it proper. Now in the year 1713 Mr. Montmort printed a Solution of it in a Book by him published upon Chance, in which was also inserted a Solution of the same by Mr. Nicolas Bernoulli; and as those two Solutions seemed to me, at first sight, to have some affinity with what I had found before, I considered them with very great attention; but the Solution of Mr. Nicolas

Bernoulli being very much crouded with Symbols, and the verbal Explication of them too scanty, I owe I did not understand it thoroughly, which obliged me to consider Mr. Montmort's Solution with very great attention: I found indeed that he was very plain, but to my great surprize I found him very erroneous; still in my Doctrine of Chances I printed that Solution, but rectified and ascribed it to Mr. Montmort, without the least intimation of any alterations made by me; but as I had no thanks for so doing, I resume my right, and now print it as my own.'

So steht es in der zweiten Auflage. In der ersten hatte de Moivre die Lösungen von Bernoulli und Montmort gelobt und ihre Übereinstimmung festgestellt ([8.1], S. 122).

Anschließend an diese Bemerkung gibt de Moivre eine Lösung des allgemeinen Problems, welche auf den Gedanken zum eben behandelten Spezialfall aufgebaut ist und im wesentlichen mit den Lösungen Bernoullis und Montmorts übereinstimmt. Charakteristisch für de Moivre ist die Art und Weise, wie er die Lösung darstellt. Er geht von einem Beispiel aus: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von 15 Gängen A zwei Münzen von B oder B drei Münzen von A gewinnt? Diese Wahrscheinlichkeit gibt er als Summe einer Anzahl von Reihen, welche er in zwei Gruppen ordnet. Die erste Gruppe betrifft den Sieg von A , die zweite den Sieg von B .

1. Gruppe

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 a^{15} & a^{14}b & & \dots & & & & & & & & & & & & \dots & a^2b^{13} \\
 1 & +15 & +105 & +455 & +1365 & +3003 & +5005 & +5005 & +3003 & +1365 & +455 & +105 & +15 & +1 & & & \\
 & & & & -1 & -15 & -105 & -455 & -455 & -105 & -15 & -1 & & & & & \\
 & & & & & & +1 & +15 & +15 & +1 & & & & & & &
 \end{array}$$

2. Gruppe

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 a^{12}b^3 & & \dots & & & & & & & & & & & & & \dots & b^{15} \\
 1 & +15 & +105 & +455 & +1365 & +3003 & +5005 & +3003 & +1365 & +455 & +105 & +15 & +1 & & & & \\
 & & & -1 & -15 & -105 & -455 & -1365 & -455 & -105 & -15 & -1 & & & & & \\
 & & & & & & +1 & +15 & +1 & & & & & & & &
 \end{array}$$

Nun betrachtet de Moivre diese beiden Gruppen und beschreibt Anordnung und Aufbau der verschiedenen Reihen. Diese Beschreibung führt er in einer so allgemeinen Form, daß der Leser in Stand gesetzt wird, jedes beliebige Beispiel zu lösen. Einen strengen Beweis versucht de Moivre gar nicht zu geben. Auf diese Art der Darstellung geht er schon im Vorwort kurz ein ([8.2], S. VIII): 'Where it may be observed, that altho' the Cases it is applied to are particular, yet the Way of Reasoning, and the Consequences derived from it, are general; that Method of Arguing about generals by particular Examples, being in my opinion very convenient for easing the Reader's Imagination.'

Vergleichen wir nun die Lösung hier mit derjenigen, welche de Moivre in Problem LXI und LXIII gegeben hat. Es gilt dasselbe, was wir schon beim Problem des erstmaligen Durchgangs festhielten: Hier werden die Wege auch nach dem Überschreiten

der Grenzen bis zu einem bestimmten Zeitpunkt weiter verfolgt und dann untersucht; dort wird der Versuch abgebrochen und die entsprechende Wahrscheinlichkeit bestimmt, sobald eine Grenze erreicht ist.

Mit den folgenden Problemen LXV und LXVI öffnet de Moivre das Tor zu einem allgemeineren Fragenkomplex, in den er aber nicht weiter eindringt und der erst in unserem Jahrhundert umfassend behandelt wurde. Es geht im Problem LXV um die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb einer bestimmten Anzahl von Gängen sowohl A n Münzen als auch B m Münzen gewinnt.

Im Anschluß an diese beiden Probleme leitet de Moivre zu ganz unerwarteten trigonometrischen Lösungen über. Staunend fragen wir, wie er diese wohl gefunden hat. Zu ihrem Beweis brauchen wir die Theorie der erzeugenden Funktion, wie sie vor allem durch Lagrange und Laplace entwickelt wurde. Im folgenden Kapitel wenden wir uns daher zunächst dieser Betrachtungsweise zu.

DIE ERZEUGENDE FUNKTION IM PROBLEM DER SPIELDAUER

Sei $a_0, a_1, a_2 \dots$ eine Folge von reellen Zahlen. Wenn die Reihe

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

im Intervall $-s_0 < s < s_0$ konvergiert, so nennen wir ihre Summe $A(s)$ die erzeugende Funktion der Folge $\{a_\mu\}$.

Wie in andern Bereichen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so ist die erzeugende Funktion auch für das Problem der Spieldauer ein vorzügliches Hilfsmittel. Zu ihrer Herleitung wollen wir im physikalischen Modell denken. Wir lassen aber das Teilchen nicht wie bisher im Nullpunkt, sondern im Punkt mit der Koordinate z starten ($0 < z < g$). Der Versuch ist fertig, wenn das Teilchen die Stelle 0 oder g erreicht hat. $u_{z,l}$ soll die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, daß das Teilchen den Nullpunkt im l -ten Schritt erreicht. In der Sprache des Spiels bedeutet das den Ruin des Spielers A im l -ten Gang. Im ersten Schritt erreicht das Teilchen die Stelle $z+1$ oder $z-1$ mit den Wahrscheinlichkeiten a bzw. b . Es gilt daher für $1 < z < g-1$ und $l \geq 1$

$$u_{z,l+1} = a \cdot u_{z+1,l} + b \cdot u_{z-1,l}. \quad (4.1)$$

Das ist eine Differenzengleichung in den Variablen z und l . Wir definieren $u_{0,l}$, $u_{g,l}$ und $u_{z,0}$ so, daß (4.1) auch für $z=1$, $z=g-1$ und $l=0$ gilt.

$$\begin{aligned} u_{0,l} = u_{g,l} = 0 & \quad \text{für } l \geq 1 \\ u_{0,0} = 1, \quad u_{z,0} = 0 & \quad \text{für } z > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

So gilt (4.1) für alle z mit $0 < z < g$ und alle $l \geq 0$.

Nun führen wir die erzeugende Funktion ein:

$$U_z(s) = \sum_{l=0}^{\infty} u_{z,l} s^l.$$

Die Reihe konvergiert sicher für $|s| < 1$. Multiplizieren wir (4.1) mit s^{l+1} und addieren wir über alle $l=0, 1, 2, \dots$, so finden wir

$$U_z(s) = a s U_{z+1}(s) + b s U_{z-1}(s) \quad 0 < z < g. \quad (4.3)$$

Aus (4.2) erhalten wir die Grenzbedingungen

$$U_0(s) = 1, \quad U_g(s) = 0. \quad (4.4)$$

Mit (4.3) haben wir eine Differenzengleichung in der einen Variablen z erhalten. Die

Terme U_z sind allerdings noch von s abhängig, aber solange wir uns mit der Differenzengleichung beschäftigen, können wir s als eine Konstante betrachten. Es gilt nun, die Gleichung (4.3) mit den Grenzbedingungen (4.4) zu lösen. Wir machen den Ansatz $U_z(s) = \lambda^z(s)$ und erhalten so aus (4.3) die Gleichung

$$\lambda(s) = a s \lambda^2(s) + b s. \quad (4.5)$$

Diese hat die beiden Lösungen

$$\lambda_1(s) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 a b s^2}}{2 a s}, \quad \lambda_2(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 a b s^2}}{2 a s}. \quad (4.6)$$

Um imaginäre Ausdrücke zu vermeiden, wählen wir $0 < s < 1$. $\lambda_1^z(s)$ und $\lambda_2^z(s)$ sind zwei partikuläre Lösungen der Differenzengleichung (4.3). Für beliebige Funktionen $A(s)$ und $B(s)$ wird auch

$$U_z(s) = A(s) \lambda_1^z(s) + B(s) \lambda_2^z(s) \quad (4.7)$$

die Gleichung lösen. Die Funktionen $A(s)$ und $B(s)$ sind nun so zu bestimmen, daß die Grenzbedingungen (4.4) erfüllt werden:

$$A(s) + B(s) = 1, \quad A(s) \lambda_1^g(s) + B(s) \lambda_2^g(s) = 0.$$

Daraus folgt

$$B(s) = \frac{\lambda_1^g(s)}{\lambda_1^g(s) - \lambda_2^g(s)}, \quad A(s) = \frac{-\lambda_2^g(s)}{\lambda_1^g(s) - \lambda_2^g(s)}.$$

So erhalten wir

$$U_z(s) = \frac{\lambda_1^g(s) \lambda_2^z(s) - \lambda_2^g(s) \lambda_1^z(s)}{\lambda_1^g(s) - \lambda_2^g(s)}$$

oder weil $\lambda_1(s) \lambda_2(s) = b/a$

$$U_z(s) = \left(\frac{b}{a} \right)^z \frac{\lambda_1^{g-z}(s) - \lambda_2^{g-z}(s)}{\lambda_1^g(s) - \lambda_2^g(s)}. \quad (4.8)$$

Es ist noch zu zeigen, daß (4.7) alle Lösungen von (4.3) enthält und somit (4.8) die einzige Lösung ist, welche die Grenzbedingungen (4.4) erfüllt. In (4.7) können wir die Koeffizienten $A(s)$ und $B(s)$ so wählen, daß diese Lösung mit irgendeiner Lösung der Gleichung (4.3) in den ersten beiden Gliedern übereinstimmt. Sind aber $U_0(s)$ und $U_1(s)$ bestimmt, so können alle übrigen $U_z(s)$ mit Hilfe der Gleichung (4.3) berechnet werden. Somit sind zwei Lösungen, welche für $z = 0$ und $z = 1$ übereinstimmen, identisch. Also enthält (4.7) alle Lösungen der Gleichung (4.3).

(4.8) ist die gesuchte erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen, ohne vorher den Punkt g durchlaufen zu haben, den Null-Punkt im l -ten Sprung erstmals erreicht. Die entsprechende erzeugende Funktion für das Ende in g erhält man, indem a, b, z durch $b, a, g - z$ ersetzt werden. Die Summe dieser beiden Funktionen ist die erzeugende Funktion der Versuchs- bzw. Spieldauer.

$$D_z(s) = \frac{(b/a)^z \{ \lambda_1^{g-z}(s) - \lambda_2^{g-z}(s) \} + \{ \lambda_1^g(s) - \lambda_2^g(s) \}}{\lambda_1^g(s) - \lambda_2^g(s)}. \quad (4.9)$$

Setzen wir hier $s = 1$, so erhalten wir mit $D_z(1)$ unter Verwendung eines Lemmas von Abel die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen überhaupt einmal eine der beiden Grenzen erreicht. Wie die Rechnung bestätigt, ist diese Wahrscheinlichkeit gleich 1. Die Funktion (4.8) hat schon Laplace in seiner *Théorie Analytique des Probabilités* angegeben. Was ihm noch fehlte, ist die einfache Herleitung.

Um explizite Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten $u_{z,l}$ zu erhalten, muß die Funktion (4.8) nach Potenzen von s entwickelt werden. Das geschieht am besten mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und einer von Lagrange eingeführten Substitution:

$$\frac{1}{\cos \gamma} = 2 (a/b)^{1/2} s. \quad (4.10)$$

Man erhält so als Koeffizienten von s^l

$$u_{z,l} = g^{-1} 2^l a^{1/2(l-z)} b^{1/2(l+z)} \sum_{r=1}^{g-1} \cos^{l-1} \frac{\pi r}{g} \sin \frac{\pi r}{g} \sin \frac{\pi r z}{g}. \quad (4.11)$$

Durch einen geeigneten Grenzübergang liefert das physikalische Modell des Problems der Spieldauer gute Näherungen für die Theorie der Brownschen Bewegung, Wärmeleitung und Diffusion in einer Dimension. Dazu läßt man die Länge der einzelnen Schritte gegen Null, ihre Anzahl gegen Unendlich und den Bruch a/b gegen 1 streben. Schon in der Form (4.11) lassen sich die Eigenfunktionen des entsprechenden Randwertproblems erkennen. Im Faktor $\sin \pi r z/g$ betrifft nämlich der Quotient z/g den Ort des Teilchens im betrachteten Intervall, und dieser Quotient bleibt beim Grenzübergang erhalten.

Ändern wir nun unsere ursprüngliche Aufgabenstellung noch so ab, daß das Teilchen nur im Nullpunkt absorbiert werden kann. Die Gleichung (4.3) gilt auch in diesem Fall, und (4.7) ist ihre allgemeine Lösung. Einzige Randbedingung ist $U_0(s) = 1$. Weil $\lambda_1(s) > 1$ und $|\lambda_2(s)| < 1$ für $0 < s < 1$, bleibt aber (4.7) nur beschränkt, wenn $A(s) = 0$. Die erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen, vom Punkt $z > 0$ ausgehend, im genau l -ten Schritt die Absorptionsschranke im Nullpunkt erreicht, ist somit

$$V_z(s) = \lambda_2^z(s) = \left(\frac{b}{a}\right)^z \lambda_1^{-z}(s). \quad (4.12)$$

In der Sprache des Spiels gesprochen, finden wir mittels (4.12) die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spieler mit z Münzen Anfangskapital von einem unendlich reichen Gegner im l -ten Gang ruiniert wird. Setzen wir in (4.12) $s = 1$, so folgt für die Wahrscheinlichkeit, daß dies überhaupt einmal geschehen wird, entweder $(b/a)^z$ oder 1, je nachdem $b \leq a$ oder $a \leq b$.

Um aus der Funktion (4.12) explizite Werte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, müssen wir den Ausdruck

$$\lambda_1^{-n} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4ab s^2}}{2as} \right)^{-n}$$

nach Potenzen von s entwickeln. Dies bietet einige Schwierigkeiten. Lagrange hat die

Entwicklung im Jahre 1775 angegeben. Ich werde mich im folgenden jedoch an Laplace halten. In Nr. 21 des zweiten Buches seiner *Mécanique céleste* lehrt er eine Methode, mit welcher man die Aufgabe lösen kann. Zum besseren Verständnis benütze ich moderne Symbole.

Sei $h(z)$ eine analytische Funktion von z , wobei $z(\alpha, t)$ wieder abhängig ist von α und t , und zwar so, daß

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)_t = f(z) \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\alpha. \quad (4.13)$$

$f(z)$ ist irgendeine rationale Funktion von z . Nun soll $h(z)$ nach Potenzen von a entwickelt werden. Dazu brauchen wir die Werte von $(\partial^i h / \partial \alpha^i)_t$ an der Stelle $\alpha = 0$. Aus (4.13) folgt

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)_t = \frac{dh}{dz} \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)_t = f(z) \frac{dh}{dz} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\alpha.$$

Benützen wir

$$\frac{dh}{dz} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\alpha = \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\alpha,$$

so kommen wir zur Gleichung

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)_t = \frac{\partial \int f \cdot (\partial h / \partial t)_\alpha dt}{\partial t}.$$

Laplace schreibt für

$$\int f \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\alpha dt$$

einfach $\int f dh$ und erhält so

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)_t = \frac{\partial \int f dh}{\partial t}. \quad (4.14)$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach α .

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2}\right)_t = \frac{\partial^2 \int f dh}{\partial \alpha \partial t} = \frac{\partial^2 \int f dh}{\partial t \partial \alpha}. \quad (4.15)$$

Setzen wir in (4.14) an Stelle von h die Funktion

$$\int f \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\alpha dt,$$

so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial \int f (\partial h / \partial t)_\alpha dt}{\partial \alpha}\right)_t = \frac{\partial \int f \{(\partial / \partial t) \int f (\partial h / \partial t)_\alpha dt\} dt}{\partial t} = \frac{\partial \int f^2 (\partial h / \partial t)_\alpha dt}{\partial t}.$$

Laplace schreibt diesen Ausdruck wieder einfacher:

$$\frac{\partial \int f^2 dh}{\partial t}.$$

Damit ändert sich (4.15) zu

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2}\right)_t = \frac{\partial^2 \int f^2 dh}{\partial t^2}.$$

Differenzieren wir dies ein zweites Mal nach α :

$$\frac{\partial^3 h}{\partial \alpha^3} = \frac{\partial^3 \int f^2 dh}{\partial \alpha \partial t^2}.$$

Gleich wie oben läßt sich das umformen zu

$$\frac{\partial^3 h}{\partial \alpha^3} = \frac{\partial^3 \int f^2 dh}{\partial t^3}.$$

Durch vollständige Induktion schließt man

$$\left(\frac{\partial^i h}{\partial \alpha^i} \right)_t = \left(\frac{\partial^i \int f^i dh}{\partial t^i} \right)_\alpha = \left\{ \frac{\partial^{i-1} (f^i (\partial h / \partial t)_\alpha)}{\partial t^{i-1}} \right\}_\alpha. \quad (4.16)$$

Dieses Resultat brauchen wir, um die Funktion $h(z)$ nach Potenzen von α zu entwickeln. Mit $h(z(0, t)) = H(t)$ und $f(z(0, t)) = F(t)$ erhalten wir so aus der Gleichung

$$h(z) = \bar{h}(\alpha) = \bar{h}(0) + \alpha \frac{d\bar{h}}{d\alpha}(0) + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2 \bar{h}}{d\alpha^2}(0) + \dots$$

die Entwicklung

$$h(z) = H + \alpha F \frac{dH}{dt} + \frac{\alpha^2}{2!} \cdot \frac{d(F^2 (dH/dt))}{dt} + \frac{\alpha^3}{3!} \cdot \frac{d^2(F^3 (dH/dt))}{dt^2} + \dots \quad (4.17)$$

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, welche Funktionen $z(\alpha, t)$ die Differentialgleichung (4.13) erfüllen. Offenbar können wir für $z(\alpha, t)$ irgendeine Funktion ϕ der Variablen $t + \alpha f(z)$ setzen:

$$z(\alpha, t) = \phi(t + \alpha f(z)).$$

Nun haben wir das Rüstzeug, um die Funktion

$$V_n(s) = \lambda_2^n(s) = \left(\frac{b}{a} \right)^n \lambda_1^{-n}(s) \quad (4.12)$$

nach Potenzen von s zu entwickeln. $\lambda_1(s)$ ist hier diejenige Lösung der Gleichung

$$\lambda(s) = a s \lambda^2(s) + b s, \quad (4.5)$$

welche für $b = 0$ nicht verschwindet. Durch die Substitutionen $a s = x$ und $a b s^2 = \alpha$ wird (4.5) zu

$$x = 1 - \frac{\alpha}{x}.$$

Nun führen wir eine neue Funktion $z(\alpha, t)$ ein:

$$z = t - \frac{\alpha}{z}. \quad (4.18)$$

Es ist also $z(\alpha, 1) = x(\alpha)$.

Die Entwicklung der Funktion $h(z)$ nach Potenzen von α gewinnen wir nach der eben hergeleiteten Methode. Dabei ist

$$h(z) = z^{-n} \quad f(z) = -\frac{1}{z} \quad F(t) = -\frac{1}{t} \quad H(t) = t^{-n} \quad \frac{dH}{dt} = -n t^{-(n+1)}$$

und

$$\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} (F^i (dH/dt)) = n(n+i-1)(n+i+2) \cdots (n+2i-1) t^{-(n+2i)} \quad (i \geq 2).$$

Der Vergleich mit (4.17) zeigt, daß

$$\begin{aligned} z^{-n} &= t^{-n} + \alpha n t^{-(n+2)} + \alpha^2 \frac{n(n+3)}{2!} t^{-(n+4)} \\ &+ \alpha^3 \frac{n(n+4)(n+5)}{3!} t^{-(n+6)} + \cdots + \alpha^i \frac{n}{n+2i} \binom{n+2i}{i} t^{-(n+2i)} + \cdots \end{aligned} \quad (4.19)$$

Diese Reihe konvergiert sicher für $t \geq 1$.

Für $t = 1$ folgt daraus die Entwicklung von $V_n(s)$.

$$\begin{aligned} V_n(s) &= \left(\frac{b}{a}\right)^n \lambda_1^{-n} = b^n s^n x^{-n} \\ &= b^n s^n \left\{ 1 + n a b s^2 + \frac{n(n+3)}{2!} a^2 b^2 s^4 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!} a^3 b^3 s^6 + \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Daraus lesen wir: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spieler mit der Primärchance a und n Münzen Anfangskapital von einem unendlich reichen Gegner innerhalb von $n+2i$ Gängen ruiniert wird, ist

$$b^n \left\{ 1 + n a b + \frac{n(n+3)}{2!} a^2 b^2 + \cdots + \frac{n}{n+2i} \binom{n+2i}{i} a^i b^i \right\}.$$

Das ist die Formel, welche de Moivre auf Seite 187 ([8.2]) angibt.

Auf ähnliche Weise lassen sich die übrigen rationalen Formeln von de Moivre beweisen. Wir zeigen das noch für den Spezialfall, daß beide Spieler gleich viele, sagen wir n Münzen einsetzen.

In der erzeugenden Funktion

$$U_z(s) = \left(\frac{b}{a}\right)^z \frac{\lambda_1^{g-z}(s) - \lambda_2^{g-z}(s)}{\lambda_1^g(s) - \lambda_2^g(s)} \quad (4.8)$$

setzen wir $z = n$, $g = 2n$ und substituieren wie vorhin $\lambda a s = x$, $a b s^2 = \alpha$. So erhalten wir

$$U_n(s) = \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{1}{\lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s)} = \frac{b^n s^n}{x^n + \alpha^n x^{-n}}. \quad (4.20)$$

Anstatt diesen Bruch direkt nach Potenzen von s zu entwickeln, entwickeln wir ihn zunächst nach Potenzen von $1/x$:

$$\begin{aligned} U_n(s) &= \frac{b^n s^n}{x^n + \alpha^n x^{-n}} = \frac{b^n s^n}{x^n} \cdot \frac{1}{1 + \alpha^n x^{-2n}} \\ &= b^n s^n \{ x^{-n} - \alpha^n x^{-3n} + \alpha^{2n} x^{-5n} - \cdots \}, \end{aligned}$$

was nur erlaubt ist, wenn $|\alpha^n x^{-2n}| < 1$. Das folgt aber aus der Bestimmungsgleichung für x : Weil wir hier nur mit der Lösung arbeiten, welche für $\alpha = 0$ nicht verschwindet, führt die Gleichung $x = 1 - \alpha/x$ zur Ungleichung $\alpha/x^2 = 1/x - 1 < 1/2 - 1 = -1/2$. Nun finden wir den Koeffizienten von s^{n+2i} wie folgt: Der Koeffizient von α^i in der Entwicklung von x^{-n} ist nach (4.19)

$$\frac{n}{n+2i} \binom{n+2i}{i}.$$

Der entsprechende Koeffizient in $\alpha^\mu x^{-(2\mu+1)n}$ ist

$$\frac{(2\mu+1)n}{(2\mu+1)n+2(i-\mu)n} \binom{(2\mu+1)n+2(i-\mu)n}{i-\mu n} = \frac{(2\mu+1)n}{n+2i} \binom{n+2i}{i-\mu n}.$$

Der gesuchte Koeffizient von s^{n+2i} in $U_n(s)$ und damit die Wahrscheinlichkeit, daß der Spieler A im $(n+2i)$ -ten Gang ruiniert wird, ist daher

$$a^i b^{i+n} \sum_{0 \leq \mu \leq i/n} \frac{(2\mu+1)n}{n+2i} \binom{n+2i}{i-\mu n}. \quad (4.21)$$

Das ist der von de Moivre angegebene Wert ([8.2], S. 170).

Zur späteren Verwendung suchen wir noch die Entwicklung des Nenners $x^n + \alpha^n x^{-n}$ von (4.20). Dazu ersetzen wir x zunächst wieder durch die allgemeinere Funktion $z(\alpha, t)$. Da die Entwicklung (4.19) auch für positive ganzzahlige Exponenten richtig ist, kennen wir die Entwicklung von z^n nach Potenzen von α :

$$\begin{aligned} z^n &= t^n - n\alpha t^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!} \alpha^2 t^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} \alpha^3 t^{n-6} \\ &+ \dots + \frac{-n}{2j-n} \binom{2j-n}{j} \alpha^j t^{n-2j} - \dots \end{aligned}$$

In dieser Reihe haben wir drei Gruppen zu unterscheiden: Zunächst stehen Terme mit positiven Potenzen von t , dann folgt eine Gruppe von Termen, die verschwinden, und mit $j \geq n$ beginnen Terme mit negativen Potenzen von t . Setzen wir in dieser letzten Gruppe $j-n=i$, so hat offensichtlich der i -te Term den Wert

$$\frac{-n}{2i+n} \binom{2i+n}{i+n} \alpha^{i+n} t^{-(n+2i)} \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Ein Vergleich mit (4.19) zeigt, daß sich in der Entwicklung von $z^n + \alpha^n z^{-n}$ alle Glieder mit negativen Potenzen von t wegheben. Es bleibt für gerade n ein Polynom in t^2 vom Grade $n/2$, für ungerade n das Produkt von t mit einem Polynom in t^2 vom Grade $(n-1)/2$:

$$\begin{aligned} t^n - n\alpha t^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!} \alpha^2 t^{n-4} - \dots + 2(-\alpha)^{n/2} \quad (n \text{ gerade}) \\ t^n - n\alpha t^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!} \alpha^2 t^{n-4} - \dots + n(-\alpha)^{(n-1)/2} t \quad (n \text{ ungerade}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Für $t=1$ erhalten wir die Entwicklung von $x^n + \alpha^n x^{-n}$ und damit

$$U_n(s) = b^n s^n \frac{1}{1 - n a b s^2 + (n(n-3)/2!) a^2 b^2 s^4 - (n(n-4)(n-5)/3!) a^3 b^3 s^6 + \dots} \quad (4.23)$$

wobei im Nenner die Reihe abbricht, sobald eines der Glieder verschwindet.

Mit einem Satz aus dem folgenden Kapitel über rekurrente Reihen können wir aus dem Resultat (4.23) unmittelbar die Rekursionsformel ablesen, welche de Moivre für den hier behandelten Spezialfall gleich hoher Einsätze gegeben hat ([8.2], S. 169).

De Moivre kannte die erzeugende Funktion noch nicht. Er schuf sich aber mit den rekurrenten Reihen ein Hilfsmittel, das ihm ähnliche Dienste leistete und die Theorie der erzeugenden Funktion im wesentlichen schon enthält. De Moivre nennt diejenigen Reihen rekurrent, deren Glieder durch eine feste Rekursionsformel mit einer bestimmten Anzahl der unmittelbar vorausgehenden Glieder verbunden sind. Z. B. gilt in der Reihe

$$1 \cdot 2r + 3r^2 + 10r^3 + 34r^4 + 97r^5 + \dots$$

für irgend vier aufeinanderfolgende Glieder K, L, M, N die Beziehung

$$N = 3M - 2L + K.$$

Den Ausdruck $3r - 2r^2 + 5r^3$ oder auch nur $3 - 2 + 5$ nennt de Moivre Relationskala oder einfach Skala.

De Moivre gibt in seinem 1730 erschienenen Werk *Miscellanea analytica de Seriebus et Quadraturis* ([9], Liber II, Cap. II, S. 26–39, und Liber IV, Cap. I, S. 72–83) eine zusammenhängende Theorie dieser Reihen und lehrt ihre Anwendung auf das Problem der Spieldauer. Auch in diesem Lehrgang hält de Moivre seinem didaktischen Prinzip die Treue, spezielle Beispiele so allgemein zu erklären, daß eine allgemeine Formulierung der Theorie gar nicht nötig ist. Auch die Beweise werden meist nur für einfache Beispiele gegeben, lassen sich aber ohne große Mühe verallgemeinern.

Die Aussagen de Moivres über rekurrente Reihen sind oft nur sinnvoll, wenn die Reihen konvergieren. De Moivre geht auf diese Schwierigkeit nicht ein. Sie läßt sich auch leicht beseitigen: Die Reihe $\{d_\mu r^\mu\}$ mit der Skala $b_1 r - b_2 r^2 + b_3 r^3 - \dots (-1)^{k-1} b_k r^k$ läßt sich nämlich durch die Reihe $\{d(k, b, r)^\mu\}$ majorisieren, wenn $d = \max_{0 \leq \mu < k} |d_\mu|$ und $b = \max_{0 < \lambda \leq k} (|b_\lambda|, 1)$ sind. Hier kann die Variable r immer so klein gewählt werden, daß die Reihe konvergiert. De Moivre beschränkt allerdings seine Theorie nicht auf Potenzreihen. Tritt keine Variable auf, so denken wir uns eine solche hinzu und haben so auch in diesem Fall die Konvergenz gewährleistet. Oft aber fehlt die Variable nur scheinbar, indem – modern gesprochen – die Reihe $\{c_\mu\}$ im Grunde genommen die Potenzreihe $\{d_\mu r^\mu\}$ bedeutet.

In der *Miscellanea analytica* baut de Moivre die Theorie der rekurrenten Reihen so auf, daß er möglichst wenig fremde Hilfsmittel braucht. Insbesondere setzt er die Partialbruchzerlegung nicht voraus. Er führt die rekurrenten Reihen auf geometrische Reihen zurück. Das sind die einfachsten der rekurrenten Reihen. De Moivre beginnt deshalb auch mit diesen ([9], S. 26):

In einer geometrischen Reihe $A, B, C, D, E \dots$ mit dem Quotienten m gilt $B = m A$, $C = m B$ usw. Wir können daraus eine Beziehung unter drei Gliedern ableiten, indem wir die erste Gleichung mit p multiplizieren, nach Null ordnen und zur zweiten addieren:

$$\begin{aligned} C &= m B \\ 0 &= p B - m p A \\ C &= (m + p) B - m p A. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} D &= (m + p) C - m p B \\ E &= (m + p) D - m p C \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Reihe $A, B, C, D, E \dots$ kann also auch als rekurrente Reihe mit der Skala $(m + p) - m p$ gedeutet werden. Analog wird eine dreigliedrige Skala geschaffen: Wir multiplizieren die Gleichung (5.1) mit der beliebigen Zahl q , ordnen sie nach Null und addieren sie zu (5.2):

$$\begin{aligned} D &= (m + p) C - m p B \\ 0 &= q C - (m q + p q) B + m p q A \\ D &= (m + p + q) C - (m p + m q + p q) B + m p q A \end{aligned}$$

Als viergliedrige Skala erhält man

$$\begin{aligned} (m + p + q + s) &= (m p + m q + m s + p q + p s + q s) \\ &+ (m p q + m p s + m q s + p q s) - m p q s. \end{aligned}$$

Diese Erkenntnisse wertet de Moivre in sechs Korollaren aus. Zunächst addiert er zwei geometrische Reihen: Die Reihe $\{a_\mu\}$ habe den Quotienten m , $\{b_\mu\}$ den Quotienten p . Dann gilt

$$\begin{aligned} a_\mu &= (m + p) a_{\mu-1} - m p a_{\mu-2} \\ b_\mu &= (p + m) b_{\mu-1} - p m b_{\mu-2} \\ a_\mu + b_\mu &= (m + p) (a_{\mu-1} + b_{\mu-1}) - m p (a_{\mu-2} + b_{\mu-2}) \end{aligned}$$

Die Relationsskala $(m + p) - m p$ dieser Summenreihe kann formell auch anders gefunden werden. Dazu führt de Moivre eine neue Variable x ein, welche von der Variablen der Potenzreihe wohl zu unterscheiden ist. Setzt man $x - m = 0$ und $x - p = 0$, so kann man aus dem Produkt $x^2 - (m + p)x + m p = 0$ die Skala $(m + p) - m p$ unmittelbar ablesen.

Bei drei geometrischen Reihen mit den Quotienten m, p und q erhält man die Gleichung

$$(x - m)(x - p)(x - q) = x^3 - (m + p + q)x^2 + (m p + m q + p q)x - m p q = 0.$$

Die Summe der drei Reihen hat daher die Skala

$$(m + p + q) - (m p + m q + p q) + m p q.$$

Dieses Verfahren ist günstig, weil es sich umkehren läßt: Die Reihe mit der Skala $a - b$ läßt sich in zwei geometrische Reihen zerlegen, die als Quotienten die Lösungen m und p der Gleichung $x^2 - a x + b = 0$ haben, vorausgesetzt, daß die beiden Lösungen reell sind. Über die Bestimmung der Anfangsglieder äußert sich de Moivre in diesem Zusammenhang nicht.

Nimmt man aus einer Reihe mit der Skala $a - b$ nur jedes zweite Glied, so findet man die Skala der neuen Reihe, indem man aus den Gleichungen $x^2 - a x + b = 0$ und $x^2 = z$ die Unbekannte x eliminiert und aus der Gleichung in z die Skala in der bekannten Weise abliest. Will man nur jedes n -te Glied berücksichtigen, so setzt man $x^n = z$ und verfährt entsprechend. Die Methode wird einsichtig, wenn man bedenkt, daß ihre Grundlage die Zurückführung der gegebenen Reihen auf geometrische Reihen ist. De Moivre gibt nur Formeln für 2-, 3- und 4gliedrige Skalen; die übrigen erhält man durch Induktion. Um die weiteren Resultate in allgemeiner Form angeben und beweisen zu können, benütze ich die elementarsymmetrischen Funktionen, die so definiert sind:

$$\begin{aligned} {}_n\sigma_1(x_\mu) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ {}_n\sigma_2(x_\mu) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ {}_n\sigma_n(x_\mu) &= x_1 x_2 \cdots x_n. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Weiter sei

$${}_n\sigma_0(x_\mu) = 1.$$

Soll eine der Größen x_μ nicht mitgerechnet werden, so vermerken wir das unterhalb des Symbols. So ist

$${}_4\sigma_2(x_\mu) = x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_2 x_4, \quad \mu \neq 3$$

Bekanntlich gilt

$$\prod_{\mu=1}^k (x - x_\mu) = \sum_{v=0}^k (-1)^v x^{k-v} {}_k\sigma_v(x_\mu). \quad (5.4)$$

Hat also die Gleichung

$$\sum_{v=0}^k a_v x^{k-v} (-1)^v = 0 \quad \text{mit} \quad a_0 = 1 \quad (5.5)$$

die k Lösungen x_μ , so gilt

$$a_v = {}_k\sigma_v(x_\mu). \quad (5.6)$$

Lassen wir in (5.4) einen Faktor weg, so erhalten wir

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^k (x - x_\mu) = \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^v x^{k-1-v} {}_k\sigma_v(x_\mu) \quad (1 \leq m \leq k), \quad (5.7)$$

und wenn wir $x = x_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \dots, k$) setzen,

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^k (x_\lambda - x_\mu) = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu x_\lambda^{k-1-\nu} \cdot {}_k\sigma_\nu(x_\mu) \quad (1 \leq m \leq k) \quad (1 \leq \lambda \leq k). \quad (5.8)$$

Für $\lambda \neq m$ verschwindet das Produkt links und damit auch die Summe rechts. Folgen wir nun wieder de Moivre. Er lehrt uns im nächsten Theorem, wie für die Reihe $\{c_\nu\}$ mit der Skala $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ das allgemeine Glied c_l auf direktem Wege berechnet werden kann. Ich beweise die Formel für die Skala

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots (-1)^{k-1} a_k: \quad (5.9)$$

Führt diese Skala zu einer Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^k a_\nu x^{k-\nu} (-1)^\nu = 0 \quad (a_0 = 1) \quad (5.10)$$

mit den k verschiedenen reellen Wurzeln x_μ , so können wir die Reihe $\{c_\nu\}$ in k geometrische Reihen mit den Quotienten x_μ zerlegen und diese gliedweise addieren. Das heißt für die ersten k Glieder

$$\begin{aligned} A_1 &+ A_2 + \dots + A_k &= c_0 \\ A_1 x_1 &+ A_2 x_2 + \dots + A_k x_k &= c_1 \\ \vdots & & \\ A_1 x_1^{k-\nu-1} &+ A_2 x_2^{k-\nu-1} + \dots + A_k x_k^{k-\nu-1} &= c_{k-\nu-1} \\ \vdots & & \\ A_1 x_1^{k-1} &+ A_2 x_2^{k-1} + \dots + A_k x_k^{k-1} &= c_{k-1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Anfangsglieder A_m sind zunächst unbekannt. Sie können jedoch aus dem Gleichungssystem (5.11) berechnet werden: Wir multiplizieren die $(k-\nu)$ -te ($0 \leq \nu < k$) Gleichung mit $(-1)^\nu {}_k\sigma_\nu(x_\mu)$ und addieren dann alle Gleichungen. Ein Vergleich mit (5.8) zeigt, daß alle Kolonnensummen mit Ausnahme der m -ten verschwinden. Diese

kann zu $A_m \cdot \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^k (x_m - x_\mu)$ vereinfacht werden. Daraus folgt

$$A_m = \frac{\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu c_{k-\nu-1} {}_k\sigma_\nu(x_\mu)}{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^k (x_m - x_\mu)} \quad (m = 1, 2, \dots, k). \quad (5.12)$$

Damit kann nun der Wert des l -ten Gliedes angegeben werden:

$$c_l = \sum_{\mu=1}^k A_\mu x_\mu^l. \quad (5.13)$$

In einem Korollar hält de Moivre fest, daß die Reihe $\{c_\nu\}$ der Summe

$$\sum_{\mu=1}^k \frac{A_\mu}{1-x_\mu} \quad (5.14)$$

gleich sei. Das ist ein Übergang von den rekurrenten Reihen zu den rationalen Funktionen. De Moivre baut aber diese Tatsache nicht in seine Theorie ein. Er zeigt später einen Weg zur Summenberechnung, der sich schöner einfügt.

Das folgende Theorem V stellt eine Verbindung mit den erzeugenden Funktionen her. Der Ausdruck

$$\frac{1}{P(r)} = \frac{1}{1-b_1 r + b_2 r^2 - \dots (-1)^k b_k r^k}$$

läßt sich, zumindest für genügend kleine r , in eine rekurrente Reihe mit der Skala $b_1 r - b_2 r^2 + \dots (-1)^{k-1} b_k r^k$ entwickeln:

$$\frac{1}{1-b_1 r + b_2 r^2 - \dots (-1)^k b_k r^k} \equiv d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + \dots \quad (5.15)$$

Auch hier geht de Moivre nicht auf die Frage der Konvergenz ein. Er beweist den Satz durch Koeffizientenvergleich in der mit $P(r)$ multiplizierten Gleichung (5.15). Aus der Identität

$$1 \equiv \{1 - b_1 r + b_2 r^2 - \dots (-1)^k b_k r^k\} \{d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + \dots\}$$

folgt

$$d_0 = 1 \quad (5.16a)$$

$$d_n = d_{n-1} b_1 - d_{n-2} b_2 + \dots (-1)^{k-1} d_{n-k} b_k \quad (n > 0), \quad (5.16b)$$

wobei $d_\mu = 0$, wenn $\mu < 0$. Die Skala der Reihe $\{d_\mu\}$ ist also $b_1 - b_2 + b_3 - \dots (-1)^{k-1} b_k$, woraus die Behauptung folgt.

Steht im Zähler der linken Seite von (5.15) ein Polynom vom Grade m , so gilt (5.16b) für alle $n > m$.

De Moivre braucht dieses Theorem unter anderem, um mit Hilfe seiner Theorie der rekurrenten Reihen den Bruch $1/P(r)$ in Partialbrüche zu zerlegen, was Leibniz und Johann Bernoulli schon 1702/03 auf anderem Wege getan hatten. Er entwickelt den Bruch in eine rekurrente Reihe, zerlegt diese in geometrische Reihen und stellt diese dann wieder als Brüche dar.

Anschließend wendet er sich anderen Problemen zu, um dann im IV. Buch auf Seite 72 unser Thema wieder aufzunehmen. Das Kapitel ist mit *De summis Serierum recurrentium* überschrieben und enthält außer dem Angekündigten eine neue Lösung des Problems der Spieldauer.

De Moivre beginnt wieder mit einem einfachen Fall. Sei $d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots$ eine rekurrente Reihe mit der Skala $b_1 - b_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d_0 &= d_0 \\
d_1 x &= d_1 x \\
d_2 x^2 &= d_1 x b_1 x - d_0 b_2 x^2 \\
d_3 x^3 &= d_2 x^2 b_1 x - d_1 x b_2 x^2 \\
&\vdots \\
d_\mu x^\mu &= d_{\mu-1} x^{\mu-1} b_1 x - d_{\mu-2} x^{\mu-2} b_2 x^2.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Bezeichnen wir die Summe der unendlichen Reihe $\{d_\mu x^\mu\}$ mit z und addieren wir alle Gleichungen (5.17), so folgt $z = d_0 + d_1 x + (z - d_0) b_1 x - z b_2 x^2$ und daraus

$$z = \frac{d_0 + d_1 x - d_0 b_1 x}{1 - b_1 x + b_2 x^2}.$$

Ähnliche Formeln leitet de Moivre für drei- und viergliedrige Skalen her. Ich will es gleich für beliebige Skalen $b_1 - b_2 + b_3 - \dots (-1)^{k-1} b_k$ tun. Analog (5.17) gilt

$$\begin{aligned}
d_0 &= d_0 \\
d_1 x &= d_1 x \\
&\vdots \\
d_{k-1} x^{k-1} &= d_{k-1} x^{k-1} \\
d_k x^k &= \sum_{\nu=1}^k d_{k-\nu} x^{k-\nu} b_\nu x^\nu (-1)^{\nu-1} \\
&\vdots \\
d_\mu x^\mu &= \sum_{\nu=1}^k d_{\mu-\nu} x^{\mu-\nu} b_\nu x^\nu (-1)^{\nu-1}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Die Summe dieser Gleichungen ist

$$z = \sum_{\lambda=0}^{k-1} d_\lambda x^\lambda + \sum_{\mu=k}^{\infty} \sum_{\nu=1}^k d_{\mu-\nu} x^{\mu-\nu} (-1)^{\nu-1} b_\nu x^\nu. \tag{5.19}$$

In der zweiten Summe rechter Hand vertauschen wir die Summationsreihenfolge, was erlaubt ist, weil die Reihe $\{d_\mu x^\mu\}$ absolut konvergiert, und ersetzen $\mu - \nu$ durch λ :

$$z = \sum_{\lambda=0}^{k-1} d_\lambda x^\lambda + \sum_{\nu=1}^k b_\nu x^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \sum_{\lambda=\nu-k}^{\infty} d_\lambda x^\lambda.$$

Diesen Ausdruck vereinfachen wir zu

$$z = \sum_{\lambda=0}^{k-1} d_\lambda x^\lambda + z \sum_{\nu=1}^k b_\nu x^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \sum_{\nu=1}^k \sum_{\lambda=0}^{k-\nu} d_\lambda x^\lambda b_\nu x^\nu (-1)^{\nu-1}$$

und erhalten so, weil $b_0 = 1$

$$z = \frac{\sum_{\lambda + \nu = 0}^{k-1} (-1)^\nu \partial_\lambda b_\nu x^{\lambda + \nu}}{\sum_{\nu=1}^k b_\nu x^\nu (-1)^\nu} . \quad (5.20)$$

Diese Summenberechnung bringt eine sehr wichtige Tatsache ans Licht. Jede rekurrente Reihe läßt sich als Quotient $Q(x)/P(x)$ zweier Polynome mit dem Grade q bzw. p darstellen, wobei

$$q < p \quad \text{und} \quad P(0) = 1 . \quad (5.21)$$

De Moivre hat, wie schon gezeigt, auch die Umkehrung dieses Satzes bewiesen. Jeder Bruch $Q(x)/P(x)$, der den Bedingungen (5.21) genügt, läßt sich in eine rekurrente Reihe entwickeln. Dabei müssen die Polynome $Q(x)$ und $P(x)$ nicht notwendigerweise teilerfremd sein. Die Kürzung des Bruches bewirkt keine Änderung der Reihe an sich, aber diese wird als Reihe mit einer andern Relationsskala gedeutet. Wir fassen diese Tatsachen in den Satz zusammen, daß zwischen den rekurrenten Reihen mit den zugeordneten Skalen und den rationalen Funktionen, welche die Bedingungen (5.21) erfüllen, eine eindeutige Abbildung besteht. Wir können daher die hier dargestellte Theorie der rekurrenten Reihen ebensogut anhand der gebrochen rationalen Funktionen verfolgen. De Moivre drückt diesen Sachverhalt nicht explizit aus; hingegen berechnet er z. B. die Summen von Teilreihen, welche nur aus jedem zweiten oder dritten Glied der ursprünglichen Reihe bestehen, und muß dabei im wesentlichen dieselben Probleme lösen wie früher, als er die Relationsskalen solcher Reihen suchte.

In diesem Zusammenhang sei auch eine 17 Seiten umfassende Abhandlung erwähnt, welche de Moivre schon 1722 in den *Philosophical Transactions* [7.3] veröffentlichte und welche die hier geschilderten Kapitel der *Miscellanea analytica* im wesentlichen enthält. Dort aber ging de Moivre umgekehrt vor: Von der Partialbruchzerlegung ausgehend, fand er Sätze über rekurrente Reihen.

Bei der Behandlung der Spieldauer bleibt de Moivre konsequent in der Terminologie der rekurrenten Reihen. Nach seinem Tode hat sich mit der erzeugenden Funktion das Denken im andern Bild durchgesetzt.

Über die Entdeckung der rekurrenten Reihen und ihrer Eigenschaften erfahren wir recht viel aus den Briefen, die zwischen den Mathematikern de Moivre, Niklaus Bernoulli und Montmort ausgetauscht wurden. Neben der Spieldauer ist mit dieser Entdeckung auch das «Probleme de la Poulle» eng verbunden. Todhunter nennt das Problem nach dem Engländer Waldegrave (siehe [17], S. 122ff.), der es aufgegriffen und an Montmort weitergegeben hatte. In Montmorts Brief an Niklaus Bernoulli vom 10. April 1711 lesen wir: «Ce meme Geometre, qui est un Gentilhomme de beaucoup d'esprit, m'a proposé depuis peu un probleme fort joli que voicy. Pierre, Paul et Jacques jouent une poulle au trictrac ou au Piquet. Aprez qu'on a tiré à qui jouera, il se trouve que Pierre et Paul commencent. On demande: 1.° quel est l'avantage de Jacques? 2.° combien il y a à parier que Pierre ou Paul gagneront plustost que

Jacques? 3.^o combien la poulle doit naturellement durer de parties? Comme vous ne sçavez peut estre pas, ce que c'est que jouer une poulle, je vais vous l'expliquer, rien n'est plus simple. On tire à qui jouera, ce sera par Ex. Pierre et Paul, ils mettent chacun un écu au jeu. Si Pierre gagne, Jacques entrera à la place de Paul et mettra un écu à la poulle; alors, si Pierre gagne, la poulle est finie et Pierre gagne deux écus. En un mot: celui qui entre, met toujours un écu au jeu, et celui qui gagne, ou deux parties de suite, si l'on est trois joueurs, ou trois parties de suite, si l'on est quatre joueurs, ou quatre parties de suite, si l'on est cinq joueurs etc., gagne et emporte tout ce qui est à la poulle.» Ebenfalls zu Beginn des Jahres 1711 hat de Moivre das Problem in seine Abhandlung *De Mensura Sortis* aufgenommen und für drei Spieler mittels unendlicher Reihen gelöst (siehe [7.1], Problema XV). Es ist hier leider nicht der Raum, um auf die verschiedenen Lösungen und die daran anknüpfende Diskussion einzugehen; wir greifen nur das heraus, was für die Geschichte der rekurrenten Reihen wesentlich ist.

Am 30. Dezember 1713 schreibt Niklaus Bernoulli an de Moivre, den er im Herbst 1712 in London aufgesucht hatte: «Mandez moy je vous prie, si vous avez fait quelques nouvelles decouvertes sur la matiere du hazard depuis que je vous ai quitté. Vous aurez trouvé sans doute une expression générale pour la continuation des formules que vous donnez page *) pour la durée des jeux qu'on joue en rabattant. J'ai trouvé des formules et des suites generales pour la durée du jeu de la poulle, qui est celui que vous proposez dans le Probl. 15 et cela pour un nombre quelconque de joueurs. Je me souviens de vous avoir communiqué deux theorèmes pour la solution de ce Problème, et de vous avoir montré, que la voye des suites infinies que vous avez employée pour le cas de 3 joueurs est impraticable pour un plus grand nombre de joueurs. Je vous envoie cy-joint la demonstration de ces 2 theoremes et celle d'un troisième qui regarde la durée de ces jeux. Je croi que la methode dont je me sers est assés singulière et nouvelle, si vous trouvez qu'elle merite d'être imprimée, je vous prie de la faire inserer dans vos transactions Philosophiques, si Mr. Newton y veut consentir.» Newton und de Moivre fanden Gefallen an der Lösung. Diese wurde der Royal Society vorgetragen, zusammen mit einer Lösung de Moivres in den *Philosophical Transactions* der Monate Oktober, November und Dezember 1714 veröffentlicht, und sie war zudem der Anlaß, um Niklaus Bernoulli in die Royal Society aufzunehmen. Am 3. März 1714 berichtet de Moivre Niklaus Bernoulli über die gute Aufnahme seiner Arbeit. Er kommt dann auf seine eigenen Untersuchungen zu sprechen und fährt fort: «Après la lettre que Vous me fites l'honneur de m'écrire Hollande de (November 1712) dans laquelle etoit inclus un Manuscript d'une lettre de Monsieur Montmaur, dont je Vous remercie icy tres humblement quoy qu'un peu tard, je me sentis excité a travailler a ce Probleme, Monsieur De Montmaur avoit jugé qu'un des Corollaires que j'avois tiré de mon Probleme de la Poule à trois, etoit hardy et il paroissoit convaincu que la methode des suites infinies ne pouvoit servir a resoudre le Probleme de la Poule à quatre, mais dans le temps que j'écrivois ce Corollaire la methode des suites infinies pour la resolution de ces sortes de Problemes

*) Diese Ziffer fehlt im Original

m'étoit familiere, et je scavois que je ne risquois rien a les tirer, effectivement Monsieur j'eus resolu ce Probleme en fort peu de temps.» Einige Zeilen später gibt de Moivre einer Ansicht Raum, die in den folgenden Jahrzehnten zuerst nur zögernde, dann aber mit der Einführung und konsequenten Anwendung der erzeugenden Funktion ihre volle Bestätigung gefunden hat. Er schreibt: «J'ay été obligé moy même de resoudre quelques Equations, mais elles servent seulement à sommer les Suites je croy que Vous trouverez qu'il y a quelque chose d'assez remarquable dans ces suites, scavoir la relation qu'elles ont entre elles, et que la manierre de les sommer est singuliere, j'oserois presque affirmer qu'il n'y a point de Probleme qui regarde le Hazard qui ne puisse se reduire à une ou plusieurs de ces suites, et que si le Probleme peut se resoudre par des nombres exacts, ces suites seront toujours sommables, parce que les termes de chaque suite auront toujours des relations données aux termes suivans ou aux precedents; ou les termes de ces suites se traverseront et auront des relations constantes à un ou plusieurs termes des autres suites, et cela dans un ordre constant.» Diese letzte Bemerkung wird verständlich aus de Moivres Lösung des «Probleme de la Poulle». Ich zitiere aus der nur an einzelnen Stellen geänderten Darstellung in der ersten Ausgabe der *Doctrine of Chances* ([8.1], S. 89): 'Let $B^I + B^{II} + B^{III} + B^{IV} + B^V + B^{VI}$ &c. represent the respective Probabilities which B has of winning the Set, in any number of Games, answering to 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. and let the sum of these Probabilities Ad infinitum be supposed = y .' Analog bezeichnet er die Wahrscheinlichkeiten für C , D und A mit den Summen z , v und x . Dann stellt er vier Blöcke von unendlich vielen Gleichungen auf. Die ersten beiden sind

$$\begin{array}{ll}
 B^I & B^I & C^I & - C^I \\
 B^{II} & = B^{II} & C^{II} & = C^{II} \\
 B^{III} & = (1/2) A^{II} + (1/4) A^I & C^{III} & = (1/2) B^{II} + (1/4) D^I \\
 B^{IIII} & = (1/2) A^{III} + (1/4) A^{II} & C^{IIII} & = (1/2) B^{III} + (1/4) D^{II} \\
 B^V & = (1/2) A^{IIII} + (1/4) A^{III} & C^V & = (1/2) B^{IIII} + (1/4) D^{III} \\
 B^{VI} & = (1/2) A^V + (1/4) A^{IIII} & C^{VI} & = (1/2) B^V + (1/4) D^{IIII} \\
 \text{\&c.} & & \text{\&c.} &
 \end{array}$$

Mit $A^I = 0$, $B^I = 1/4$, $B^{II} = 0$ folgt für die Summen des ersten Blocks $y = 1/4 + 3/4 x$, analog beim zweiten Block $z = 1/2 y + 1/4 v$ usw. Aus diesen Gleichungen können y , z , v , x bestimmt werden.

An dieser Stelle wollen wir eine Beobachtung einschieben, die den Gebrauch der Indizes betrifft: Es war de Moivre, der diese Schreibweise eingeführt hat, die bisher G. Cramer zugeschrieben wurde (siehe [21]). Er schreibt im schon zitierten Brief vom 3. März 1714 im Anschluß an eine Bemerkung zum «Probleme de treize» (siehe [8.1], Problem XXV): «J'ay inventé pour ces Problemes une nouvelle espece d'algebre qui est fort courte et dont le mistere peut etre expliqué en deux ou trois lignes.» Niklaus

Bernoulli antwortet darauf am 4. August 1714: «Je suis ravi d'entendre que Vous préparés une nouvelle edition de Vôte Livre *De Mensura Sortis*, je me flatte d'y trouver beaucoup de belles choses et des methodes nouvelles pour l'avancement de la science du hazard, et particulièrement cette nouvelle espece d'algebre que Vous avés inventée, laquelle je soubçonne être semblable à la methode que Vous avés employée dans la Poulle, c'est à dire en marquant les probabilités de cette maniere B^I, B^{II}, B^{III} , &c avec des traits au dessus, ou si cette algebre a quelque chose de plus fin, comme Vous dites que le mystere en peut être expliqué en deux ou trois lignes, je Vous prie d'avoir la bonté de me la communiquer.» Montmort hatte sowohl durch de Moivre direkt als auch durch Niklaus Bernoulli von der neuen Schreibweise gehört. Er bezieht sich wohl auch darauf, wenn er im Brief vom 22. März 1715 Niklaus Bernoulli mitteilt: «Cependant, je loue et j'approuve fort l'idée nouvelle de Mr. Moivre, et je m'en servirai lorsque l'occasion s'en presentera. Ces sortes d'abreges sont quelquefois tres utiles.»

De Moivre ist noch weitergegangen und sogar dem «allgemeinen Index» sehr nahe gekommen. Er schreibt auf Seite 100 der ersten Auflage der *Doctrine of Chances*: 'Let $\overline{B^I}, \overline{C^I}, \overline{D^I}, \overline{E^I}, \overline{F^I}, \overline{A^I}$ denote the Probabilities which B, C, D, E, F, A have of winning the Set, or of being Fined, in any number of Games; and let the Probabilities of winning or being Fined in any number of Games less by one than the preceding, be denoted by $\overline{B^{II}}, \overline{C^{II}}, \overline{D^{II}}, \overline{E^{II}}, \overline{F^{II}}, \overline{A^{II}}$: And so on. Then I say that,

$$\begin{aligned}\overline{B^I} &= 1/2 \overline{A^{II}} + 1/4 \overline{A^{III}} + 1/8 \overline{A^{IIII}} + 1/16 \overline{A^V} \\ \overline{C^I} &= 1/2 \overline{B^{II}} + 1/4 \overline{F^{III}} + 1/8 \overline{E^{IIII}} + 1/16 \overline{D^V} \\ &\vdots\end{aligned}$$

In den *Philosophical Transactions* (Band XXIX, S. 158) hat er an der entsprechenden Stelle die neuen Größen $\overline{B^I}$ usw. von den alten nicht durch einen Querstrich unterschieden, sondern unten indiziert, also z. B.

$$B_I = 1/2 A_{II} + 1/4 A_{III} + 1/8 A_{IIII} + 1/16 A_V,$$

womit er dem heutigen Brauch sehr nahe gekommen ist.

Bei der weiteren Behandlung der rekurrenten Reihen hat er dann leider die Indizierung wieder fallengelassen und sich damit einer vorzüglichen Möglichkeit begeben, seine Formeln übersichtlicher und allgemeingültig zu gestalten.

Nach diesen Bemerkungen zur Indizierung wollen wir wieder den Gedankengängen über unendliche Reihen folgen. Die Lösung, von der wir oben ein Bruchstück zeigten, hat de Moivre, wie er an Niklaus Bernoulli und Montmort berichtet, im Winter 1712/13 gefunden. Der Formalismus zur Berechnung der Summe rekurrenter Reihen stammt also spätestens aus jener Zeit. De Moivre hat ihm anfänglich wohl keine besondere Bedeutung zugemessen. In den *Philosophical Transactions* leitet er den zitierten Abschnitt mit den Worten ein: «Jam vero Series istæ sunt convergentes,

adeoque singulae summari possunt per vulgarem Arithmeticam.» In der *Doctrine of Chances* hingegen lesen wir: ([8.1], S. 81): 'The Terms whereof each Column of this Table is composed, being not easily summable by any of the known Methods, it will be convenient, in order to find their Sums, to use the following Analysis.'

Bei der Lösung des «Probleme de la Poulle» zeigt de Moivre, daß er nicht nur rekurrente Reihen $A_1, A_2, \dots$ summieren kann, sondern auch solche Reihen, die aus jenen durch gliedweise Multiplikation mit den Gliedern einer arithmetischen Reihe entstehen, also z. B. $A_1 + 2 A_2 + 3 A_3 + 4 A_4 + \dots$. Schon bald darnach sieht er, wie man eine Reihe summiert, deren Glieder durch gliedweise Multiplikation zweier rekurrenter Reihen entstanden sind. Begeistert von dieser Entdeckung fordert er Niklaus Bernoulli mit einer entsprechenden Aufgabe heraus (es handelt sich um Problem XLIII der ersten Auflage der *Doctrine of Chances*): «Je finis par un Probleme que je crois des plus beaux, et lequel je ne crois pas pouvoir etre resolu facilement que par le moyen des suites dont j'ay deja fait mention. Le voicy. A et B ont chacun 6 jettons ou tel autre nombre qu'on voudra egal ou inegal, toutes les fois que A gagne, il donne une guinée a B et un jetton, toutes les fois que B gagne il donne 20 Shillings et un jetton a A , et ils jouent jusqu'a ce que l'un ou l'autre ait perdu tous ses jettons. Combien vaut l'Avantage de B ?» (Siehe Brief vom 3. März 1714.) Und an Montmort schrieb er darüber, wie aus dessen Brief an Niklaus Bernoulli vom 15. August 1714 hervorgeht: «Il y a quelque chose dans ma solution du probleme de la Poulle, qui peut servir à la resolution de ce probleme, mais tout n'y est pas, mais je suis tres persuadé qu'en cas que Mr. Bernoulli veuille l'entreprendre, il n'aura pas besoin de mes idées.» Niklaus Bernoulli zeigt sich der gestellten Aufgabe durchaus gewachsen. Er geht sie ganz anders an als de Moivre und muß so gar keine unendlichen Reihen benützen. Am 4. August 1714 sendet er an den Herausforderer zwei verschiedene Lösungen, zusammen mit einer äußerst eleganten Lösung des «Probleme de la Poulle», in welcher ebenfalls keine unendlichen Reihen vorkommen. Für de Moivre, begeistert von der Anwendung unendlicher Reihen auf Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wird diese Eröffnung wohl ärgerlich gewesen sein. Niklaus wartete von nun an vergebens auf eine Antwort. Noch im August 1719 beklagt er sich, seit jenem Brief nichts mehr von de Moivre erhalten zu haben. So verstummt das Gespräch über rekurrente Reihen, bis ihm de Moivres Buch *Doctrine of Chances* vom Jahre 1718 neue Impulse gibt. Neben der neuen Lösung des Problems der Spieldauer sind hier vor allem drei Lemmata zu nennen ([8.1], S. 127–134). Im ersten behauptet de Moivre, daß die Skala (er sagt hier Index) einer Reihe, deren n -te Differenzen 0 sind, aus allen Koeffizienten mit Ausnahme des ersten von $(a - b)^n$ besteht. Im zweiten Lemma berechnet er die Summe rekurrenter Reihen oder auch nur endlich vieler Glieder solcher Reihen. Im dritten Lemma geht es um die schon erwähnte Bestimmung der Skala einer Reihe, die aus der gliedweisen Multiplikation zweier rekurrenter Reihen entsteht. Explizite Resultate gibt de Moivre nur für einfache Fälle und zudem ohne Beweise (siehe S. 134 und 154). Er schreibt dazu im Vorwort (S. IX): 'I hope the Reader will excuse my not giving the Demonstrations of some few things relating to this Subject, especially of the two Theorems contained in page 134 and 154, and of

the Method of Approximation contained in page 149 and 150; whereby the Duration of Play is easily determined with the help of a Table of Natural Sines: Those Demonstrations are omitted purposely to give an occasion to the Reader to exercise his own Ingenuity. In the mean Time, I have deposited them with the Royal Society, in order to be Published when it shall be thought requisite.' Die Leser waren aber, wie aus dem Briefwechsel zwischen Montmort und Niklaus Bernoulli hervorgeht, nicht so nachsichtig, wie de Moivre gehofft hatte.

Nachdem Montmort am 28. Juni 1718 an Niklaus Bernoulli zunächst einige allgemeine Bemerkungen, vor allem zum Vorwort des Buches geschrieben hatte und ein Brief mit ausführlicheren Angaben verlorengegangen war, berichtete er im Brief vom 31. Dezember 1718 insbesondere über die genannten drei Lemmata. Seine Bemerkungen sind sehr interessant, vor allem jene, welche das Bestimmen eines beliebigen Gliedes einer rekurrenten Reihe betreffen. De Moivre konnte damals diese Aufgabe noch nicht lösen, obwohl es ihm im Spezialfall der Spieldauer gelungen war. Montmort glaubt jedoch irrtümlicherweise, daß sein emigrierter Landsmann vorgebe, auch das allgemeine Problem gelöst zu haben. Er bemerkt deshalb: «Ce 34^{eme} prob. n'apprend point à trouver ces derniers termes. Je crois estre sûr que c'est une gasconnade de M. Moivre qui dit icy sçavoir ce qu'il ne sçait point. Je tiens ce probleme tres difficile trouver tel terme que l'on voudra d'une suite formé sur un index quelconque. Je sçai certains rapports entre m et n , lorsque l'index est $m + n$, qui rendent ce probleme praticable, mais en general, je le tiens tres difficile. Vous en jugerez, je crois, comme moy, que Mr. Moivre par Ex. me donne le millieme de cette suite tres simple

$$1 + 5 + 23 + 105 + 479 + \text{etc.},$$

dont l'index est $5 - 2$, en sorte que chaque terme de la suite soit egal à cinq fois le precedent moins deux fois le penultieme, le 1^{er} terme de la suite etant, si l'on veut, multiplié par r , le 2^e par $r r$, le 3^{eme} par r^3 etc.

J'ay trouvé que l'index etant $m - n$ et m surpassant n de l'unité, la somme des p 1^{ers} termes de la suite qui sera formée sur cet index sera exprimée par cette formule

$$\frac{n r (r-1) (n r)^p - 1}{(n-1) (r-1) (n r-1)} - \frac{r (n r-1) (r^p - 1)}{(n-1) (r-1) (n r-1)} . »$$

Nach einem Zahlenbeispiel folgt die aufschlußreiche Bemerkung: «Vous verrez bien, Monsieur, que ce qui fait trouver la somme dans cette espece particuliere est que chaque terme de la suite est la somme d'une progression Geometrique. J'en ai encore decouvert quelques autres en les reduisant par diverses adresses à des progressions Geometriques; mais je le repete: la solution generale est fort difficile et je parirois que M. Moivre ne l'a pas.» Montmort ist von Reihen solcher Art offensichtlich fasziniert. Er will deshalb weiter darüber nachdenken. Im übrigen ist er der Meinung: «Mr. Moivre auroit fort bien pu dire que nous luy avons donné occasion de penser à ces sortes de suites; mais ce n'est pas sa methode de citer.» Montmort nennt darauf eine Reihe aus der zweiten Auflage seines Buches,^a welche Niklaus Bernoulli auf Grund einer Rekursionsskala gebildet hatte. Weiter stellt er fest, daß es Niklaus im Brief

vom 28. August 1714 gelungen war, eine spezielle rekurrente Reihe zu summieren. Neben dem sachlich Interessanten zeigt der Brief vom 31. Dezember 1718, wie sich das Verhältnis zu de Moivre erneut verschlechtert, so etwa, wenn Montmort urteilt: «D'ailleurs je ne suis pas content de M. Moivre qui est un homme d'esprit à la vérité, mais qui est vain et qui ne va pas droit.»

Niklaus Bernoulli, der den langen Brief erst am 6. Februar 1719 erhalten hat, schreibt zunächst am 11. Februar nur kurz zurück, um dann am 1. April ausführlich zu antworten: «Je vous remercie de ce que Vous avés pris la peine de me communiquer les 3 Lemmes de Mr. de Moivre avec Vos remarques que j'ai approuvé toutes; je m'étonne que Mr. de Moivre fasse tant de mystere de ces 3 Lemmes, et en particulier du 3^{me}, jusqu'à en déposer les demonstrations cachettées auprès de la Société Royale; je suis sûr de trouver l'index quelconque d'une suite formée du produit de chaque terme d'une suite d'un index donné par chaque terme d'une suite dont l'index est pareillement donné; ce Probleme demande plus de travail que d'adresse*). Je suis de Vôte avis quand Vous dites qu'il est très difficile de trouver un terme quelconque d'une suite formée sur un index quelconque, mais je ne sçai pas si Mr. de Moivre prétend savoir la solution generale de ce Probleme, peut être parle-t-il seulement d'un cas particulier dans son 34^e Probl. Vous avés bien remarqué que la chose est facile lorsque l'index = $m - n$, et m surpasse n de l'unité; la même chose se peut dire lorsque l'index est $m + n$, et n surpasse m de l'unité. J'ai tiré de cette remarque l'expression suivante pour un terme quelconque d'une suite, dont les deux 1^{ers} termes sont a et b , et l'index $m + n$, savoir

$$b \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} m + \sqrt{\frac{1}{4} m m + n}\right)^{p-1} - \left(\frac{1}{2} m - \sqrt{\frac{1}{4} m m + n}\right)^{p-1}}{\sqrt{m m + 4 n}} \\ + a n \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} m + \sqrt{\frac{1}{4} m m + n}\right)^{p-2} - \left(\frac{1}{2} m - \sqrt{\frac{1}{4} m m + n}\right)^{p-2}}{\sqrt{m m + 4 n}}$$

où p signifie le quantième du terme cherché.» Nach einem Zahlenbeispiel folgt unter NB: «Lorsque $\sqrt{\frac{1}{4} m m + n}$ est une quantité rationnelle, on aura exactement la valeur d'un terme cherché, si $\sqrt{\frac{1}{4} m m + n}$ est une quantité irrationnelle, mais réelle, cette expression sera bonne pour approcher de la juste valeur par le moyen des Logarithmes.» Wir staunen erneut über die mathematische Kraft des Neffen von Jakob und Johann Bernoulli. Mit der Bestimmung eines beliebigen Gliedes einer rekurrenten Reihe mit zweigliedriger Skala hat er von neuem de Moivre übertroffen, vielleicht ohne daß dieser je davon Kenntnis nehmen konnte.

Niklaus Bernoulli schließt seine Bemerkungen zu den drei Lemmata mit den Worten: «Mr. de Moivre a pû voir non seulement dans cette page 330, mais aussi dans une de mes lettres où je lui ai communiqué ma regle que Vous cités dans Vôte lettre, que je savois sommer les suites de son second Lemme, et il auroit dû reconnoître que nous lui avons donné occasion de penser à ces choses.» Doch hier wird wohl de Moivres

*) Das Problem sollte ihm dennoch Mühe machen, wie aus dem Brief vom 26. August 1719 hervorgeht.

Verdienst zu sehr geschmälert. Dieser summierte ja, wie er berichtet, schon im Winter 1712/13 solche Reihen. Die erwähnte briefliche Mitteilung von Niklaus Bernoulli, welche kaum früher anzusetzen wäre, habe ich nirgends gefunden. Zudem betrifft sie, was Bernoulli auch gleich hinzufügt, nur einen Spezialfall des zweiten Lemmas.

Die Bestimmung eines beliebigen Gliedes einer rekurrenten Reihe sollte auch de Moivre, selbst bei mehrgliedriger Skala, bald einmal gelingen. In den *Philosophical Transactions* für die Monate September und Oktober des Jahres 1722 veröffentlichte er das Ergebnis seiner Untersuchungen über rekurrente Reihen mit dem Titel: *De Fractionibus Algebraicis Radicalitate immunibus ad Fractiones Simpliciores reducendis, deque summandis Terminis quarundam Serierum æquali Intervallo a se distantibus*. In wesentlich geänderter, schönerer Form hat er diese Arbeit in seine *Miscellanea analytica* vom Jahre 1730 aufgenommen. Wie er im Vorwort zur Veröffentlichung von 1722 angibt, hat er deren Inhalt teils am 5. Mai 1720 der Royal Society vorgelegt, teils schon zwei Jahre früher beim Präsidenten dieser Gesellschaft hinterlegt.

So können wir zusammenfassend festhalten, daß de Moivre die rekurrenten Reihen und deren Eigenschaften in den Jahren 1712–1720 wohl vorwiegend selbständig entdeckt hat, daß aber gleichzeitig sowohl Montmort als vor allem auch Niklaus Bernoulli wesentliche Ergebnisse gefunden und angewandt haben.

KREISTEILUNG UND SPIELDAUER

Im 4. Kapitel fanden wir als erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spieldauer den Ausdruck (4.9). Für gleich hohe Einsätze kann die Funktion zu

$$D_n(s) = \frac{(b/a)^n + 1}{\lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s)} \quad (6.1)$$

vereinfacht werden. $\lambda_1(s)$ und $\lambda_2(s)$ sind durch die Gleichung

$$\lambda(s) = a s \cdot \lambda^2(s) + b s \quad (4.5)$$

bestimmt:

$$\lambda_{1,2}(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 a b s^2}}{2 a s} . \quad (4.6)$$

Um explizite Werte für die Wahrscheinlichkeiten des Spielendes in einem gewissen Gang zu erhalten, muß die Funktion (6.1) in eine Potenzreihe entwickelt werden. Dazu bieten sich grundsätzlich drei Möglichkeiten an: Partialbruchzerlegung, Methode der rekurrenten Reihen und Maclaurin-Entwicklung. Im 4. Kapitel zeigten wir eine Lösung, aus der *Théorie Analytique des Probabilités* von Laplace, welche eine Kombination der beiden letztgenannten Methoden darstellt: Zuerst wird der Nenner nach Maclaurin zu einem Polynom entwickelt und anschließend aus diesem Polynom die Rekursionsskala abgelesen.

Für die Partialbruchzerlegung müssen die Nullstellen des Nenners bestimmt werden. Dazu wollen wir etwas weiter ausholen.

De Moivre beginnt die *Miscellanea analytica* mit folgendem Lemma I:

Sei γ ein beliebiger Winkel und $x = \cos \gamma$, $l = \cos n \gamma$. Dann gilt

$$x = (1/2) \sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{1/2}{\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}}} . \quad (6.2)$$

Das ist der nach de Moivre benannte Satz in einer etwas anderen Form. In der modernen Schreibweise heißt das nämlich:

$$\cos \gamma = (1/2) (\cos n \gamma + i \sin n \gamma)^{1/n} + (1/2) (\cos n \gamma + i \sin n \gamma)^{-(1/n)} .$$

Im anschließenden Korollar setzt de Moivre

$$\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} = z \quad (6.3)$$

und erhält

$$x = \frac{1}{2} z + \frac{1/2}{z} . \quad (6.4)$$

Vergleichen wir das mit der Bestimmungsgleichung (4.5) für $\lambda(s)$ in der Form

$$\frac{1}{2\sqrt{a b s}} = \frac{1}{2} \lambda \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1/2}{\lambda \sqrt{a/b}}, \quad (6.5)$$

so liegt die Substitution

$$\frac{1}{2\sqrt{a b s}} = \cos \gamma \quad (6.6)$$

auf der Hand. Das ist aber genau die Substitution (4.10) von Lagrange. Sie führt über (6.3) und (6.2) zu den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{b}{a}} (\cos n \gamma \pm \sqrt{-1} \sin n \gamma)^{1/n}. \quad (6.7)$$

Daraus folgt der Nenner von (6.1.)

$$\begin{aligned} \lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s) &= \left(\frac{b}{a}\right)^{n/2} (\cos n \gamma + \sqrt{-1} \sin n \gamma + \cos n \gamma - \sqrt{-1} \sin n \gamma) \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^{n/2} 2 \cos n \gamma. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Hier sind die Nullstellen offensichtlich. Der Nenner verschwindet für $n \gamma = \mu \pi - \pi/2$,

d. h. für $\gamma_\mu = (2\mu-1) \pi/2n$, also für

$$s_\mu = \frac{1}{2\sqrt{a b} \cos (2\mu-1) \pi/2n} \quad (1 \leq \mu \leq n). \quad (6.9)$$

Dieses Resultat führt ohne Schwierigkeiten zu den gewünschten Koeffizienten (siehe z. B. [15], S. 321/322).

Soll die Funktion (6.1) mit Hilfe der Lehre von den rekurrenten Reihen entwickelt werden, so muß zunächst der Nenner $\lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s)$ als Polynom in s geschrieben werden. Dieses Problem lösten wir im 4. Kapitel nach Laplace. Ist jedoch das Resultat einmal erraten, so kann es einfacher durch vollständige Induktion bewiesen werden (siehe Anhang I). Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s) &= \frac{1}{a^n s^n} \left\{ 1 - n a b s^2 + \frac{n(n-3)}{2!} a^2 b^2 s^4 - \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{-n}{2j-n} \binom{2j-n}{j} a^j b^j s^{2j} + \dots \right\} \quad \left(j \leq \frac{n}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

lesen wir die Skala

$$n a b - \frac{n(n-3)}{2!} a^2 b^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} a^3 b^3 - \dots \quad (6.11)$$

Von hier aus sind grundsätzlich zwei Wege möglich. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten können sukzessive mittels der Skala oder direkt mit Hilfe der Formel (5.13) berechnet werden.

Wir leiteten die Skala (6.11) her, um die Wahrscheinlichkeit der Spielbeendigung in einem gewissen Gang zu bestimmen. Sie gilt aber auch für die Wahrscheinlichkeiten w_l , daß das Spiel nach l Gängen weitergeht. (Beweis siehe Anhang II.)

Um nun wieder de Moivre folgen zu können, wenden wir uns dieser Fragestellung zu und berechnen mit Hilfe der Skala (6.11) die Glieder w_l auf direktem Wege. Sei zunächst n , die Anzahl der Münzen, gerade. Das Spiel kann dann nur in einer geraden Anzahl von Gängen enden, was sich dahin auswirkt, daß wir eine Potenzreihe in s^2 erhalten. Es gilt nun, die Reihe mit der $n/2$ -gliedrigen Skala (6.11) in $n/2$ geometrische Reihen zu zerlegen und diese gliedweise zu addieren.

In der früher gelehrtten Weise füttert de Moivre die Skala (6.11) mit Potenzen von x und fragt nach den Nullstellen x_μ dieses Ausdruckes:

$$x^{n/2} - n a b x^{(n/2)-1} + \frac{n(n-3)}{2!} a^2 b^2 x^{(n/2)-2} - \dots (-1)^{n/2} a^{n/2} b^{n/2} 2 = 0. \quad (6.12)$$

Ihre Bestimmung wäre eine mühsame Arbeit, wenn wir nicht auf die Gleichung (6.10) und damit auf die Lösung (6.9) zurückgreifen könnten. Setzen wir hingegen $x = 1/s^2$ und multiplizieren wir die linke Seite von (6.12) mit $1/a^n$, so erhalten wir die rechte Seite von (6.10). Von dieser Funktion kennen wir die Nullstellen. Mit $x_\mu = 1/s_\mu^2$ folgt aus (6.9)

$$x_\mu = 4 a b \cos^2 \frac{2\mu-1}{2n} \pi \quad \left(1 \leq \mu \leq \frac{n}{2}\right). \quad (6.13)$$

De Moivre gibt diese trigonometrischen Lösungen der Gleichung (6.12) ohne Beweis. Im weiteren können wir uns aber wieder an ihn halten. Die $n/2$ untereinander verschiedenen Lösungen (6.13) sind die Quotienten der geometrischen Reihen. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten w_{2h} , daß das Spiel länger als $2h$ Gänge dauert, lassen sich somit als Summe $\sum_{m=1}^{n/2} A_m x_m^h$ darstellen. Einige Arbeit bereitet noch die Bestimmung der Anfangsglieder A_m der geometrischen Reihen.

Weil die ersten $n/2$ Glieder der Reihe w_{2h} alle gleich 1 sind, gilt nach (5.12)

$$A_m = \frac{\sum_{\nu=0}^{n/2-1} (-1)^\nu \cdot 1 \cdot \frac{n!}{\mu \mp m} \sigma_\nu(x_\mu)}{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^{n/2} (x_m - x_\mu)}. \quad (6.14)$$

Ein Vergleich mit (5.8) zeigt, daß hier der Zähler zu

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^{n/2} (1 - x_\mu)$$

vereinfacht werden kann. Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit $(1 - x_m)$, so erhal-

ten wir den Wert des Polynoms linker Hand in (6.12). Dieser Wert ist aber gleich $1 - w_n$, der Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel schon im n -ten Gang aufhört, also gleich $a^n + b^n$. Der Zähler von (6.14) wird so schließli zu

$$\frac{a^n + b^n}{1 - x_m} = \frac{a^n + b^n}{1 - 4 a b \cos^2 \frac{(2m-1)\pi}{2n}}.$$

Zur Vereinfachung des Nenners bedienen wir uns der Identität (Beweis siehe Anhang III)

$$\prod_{\mu=1}^{n/2} \left\{ \cos^2 \frac{2m-1}{2n} \pi - \cos^2 \frac{2\mu-1}{2n} \pi \right\} = \frac{n (-1)^{m-1}}{2^{n-1} \sin \frac{(2m-1)\pi}{n}}. \quad (6.15)$$

Daraus folgt

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^{n/2} (x_m - x_\mu) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^{n/2} \left\{ 4 a b \cos^2 \frac{2m-1}{2n} \pi - 4 a b \cos^2 \frac{2\mu-1}{2n} \pi \right\} \\ = \frac{n (-1)^{m-1} (4 a b)^{(n/2)-1}}{2^{n-1} \sin \frac{(2m-1)\pi}{n}}.$$

Aus (6.14) wird so schließlich

$$A_m = \frac{(-1)^{m-1} (a^n + b^n) 2 \sin \frac{(2m-1)\pi}{n}}{n \{1 - 4 a b \cos^2 \frac{(2m-1)\pi}{2n}\} (a b)^{(n/2)-1}} \quad (6.16)$$

und damit

$$w_{2h} = \sum_{m=1}^{n/2} A_m x_m^h = \frac{a^n + b^n}{n} (a b)^{h - (n/2) + 1} 2^{2h+1} \\ \times \sum_{m=1}^{n/2} (-1)^{m-1} \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi}{n}}{1 - 4 a b \cos^2 \frac{(2m-1)\pi}{2n}} \left(\cos \frac{2m-1}{2n} \pi \right)^{2h}. \quad (6.17)$$

Für ungerade n kommt man über ähnliche Zwischenergebnisse zum gleichen Ergebnis (vgl. [9], S. 76–80, und [8.2], S. 187–188 und 202–206).

Diese Formel ist das krönende Ergebnis der Untersuchungen de Moivres über die Spieldauer. (6.17) ist nicht etwa eine Näherungsformel, sondern gibt für beliebige Werte von n, h, a und b den genauen Wert der Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach $2h$ Gängen noch nicht fertig ist.

Blenden wir kurz zurück:

(6.17) ist der Koeffizient einer Potenz von s in der Entwicklung eines Bruches mit dem Nenner $\lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s)$, wobei die $\lambda_i(s)$ durch die Gleichung

$$\frac{1}{s} = a \lambda + \frac{b}{\lambda}$$

bestimmt werden. Solche oder ähnliche Ausdrücke kommen aber weder in der *Miscellanea analytica* noch in der *Doctrine of Chances* im Zusammenhang mit der Spieldauer vor. De Moivre sagt immer nur, die Gleichung

$$x^{n/2} - n a b x^{(n/2)-1} + \frac{n(n-3)}{2!} a^2 b^2 x^{(n/2)-2} - \dots = 0 \quad (6.12)$$

habe die Lösungen

$$x_{\mu} = 4 a b \cos^2 \frac{2\mu-1}{2n} \pi. \quad (6.13)$$

Trotzdem kann kein Zweifel bestehen, daß der Schlüssel zu diesen Lösungen in den Korollaren zu seinem berühmten Satz am Anfang des Buches zu suchen ist. Er geht dort nämlich im Anschluß an die Formeln (6.3) und (6.4) weiter und formt (6.3) um zu

$$1 - 2 l z^n + z^{2n} = 0. \quad (6.18)$$

Mit Hilfe von (6.4) kann er daraus die Größe z eliminieren und so eine Beziehung zwischen $l = \cos \beta$ und $x = \cos (\beta/n)$ herstellen. Für den Spezialfall $n = 5$ erhält er

$$16 x^5 - 20 x^3 + 5 x - l = 0, \quad (6.19)$$

was der Entwicklung von $\lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s)$ nach Potenzen von s entspricht. Andererseits findet er die Zerlegung

$$1 - 2 l z^n + z^{2n} = (1 - 2 a z + z^2) (1 - 2 b z + z^2) \cdots (1 - 2 p z + z^2), \quad (6.20)$$

wobei $a, b, \dots, p$ die Kosinus der verschiedenen Lösungen von β/n sind.

Im speziellen betrachtet er dann den Fall $\beta = \pi$, wo (6.18) zu $1 + 2 z^2 + z^{2n} = (1 + z^n)^2 = 0$ vereinfacht werden kann, und findet für gerade n

$$1 + z^n = \left(1 - 2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot z + z^2\right) \left(1 - 2 \cos \frac{3\pi}{n} \cdot z + z^2\right) \cdots \left(1 - 2 \cos \frac{n-1}{n} \pi \cdot z + z^2\right).$$

Teilen wir diese Gleichung durch $z^{n/2}$, was de Moivre nicht mehr tut, so folgt mittels (6.14)

$$z^{n/2} + z^{-n/2} = \left(\frac{x}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{x}{2} - 2 \cos \frac{3\pi}{n}\right) \cdots \left(\frac{x}{2} - 2 \cos \frac{n-1}{n} \pi\right).$$

Im weitem zerlegt er Brüche wie $1/(1 + z^n)$ in Partialbrüche.

Das sind lauter Operationen und Gleichungen, die bei der Behandlung der Spieldauer gebraucht werden. De Moivre verschweigt das, weshalb uns seine trigonometrischen Lösungen zunächst befremden müssen.

Doch eine Frage ist noch unbeantwortet: Wir haben die Verbindung zwischen Kreisteilung und Spieldauer mit Hilfe der erzeugenden Funktion hergestellt. De Moivre kannte diese Methode noch nicht. Wie konnte er also den Zusammenhang trotzdem finden?

Es ist folgender Gang denkbar: De Moivre entdeckte einerseits, wie er das in der *Doctrine of Chances* nahelegt, anhand einfacher Beispiele die rekurrente Beziehung zwischen den gesuchten Wahrscheinlichkeiten. Andererseits arbeitete er mit Funktionen von der Form (6.3), (6.4), (6.18) ff. und fand, daß bei Gleichungen wie (6.19) dieselben Koeffizienten auftreten wie in den Rekursionsformeln zur Spieldauer. Hatte er aber die Identität (6.10) einmal entdeckt, so konnte er gleich oder ähnlich weiterarbeiten, wie wir es im Anschluß an (6.10) getan haben, und so die trigonometrischen Lösungen finden.

Doch zurück zum Ergebnis (6.17): Aus dieser Lösung erhält man schon eine sehr gute Näherungsformel, wenn nur der erste Summand berücksichtigt wird:

$$w_l \approx \frac{a^n + b^n}{n} (a \ b)^{(l-n+2)/2} 2^{l+1} \frac{\sin(\pi/n)}{1 - 4 \ a \ b \cos^2(\pi/2n)} \left(\cos \frac{\pi}{2n} \right)^l \quad (6.21)$$

und für $a = b = 1/2$

$$w_l \approx \frac{2}{n} \frac{(\cos(\pi/2n))^{l+1}}{\sin(\pi/2n)} \quad (6.22)$$

Die Näherung ist um so besser, je größer n und l sind. De Moivre berechnet z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel bei 45 Einsätzen innerhalb 1519 Gängen nicht fertig wird. Der erste Summand ist 0,50559. Der zweite Term ergäbe eine Korrektur von 0,00002081!

Mit Hilfe der Formel (6.22) beantwortet de Moivre auch die Frage, bei wie vielen Gängen Fortdauer und Ende des Spiels gleich wahrscheinlich seien. Er logarithmiert die Gleichung

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{n} \frac{(\cos \pi/2n)^{l+1}}{\sin(\pi/2n)}$$

und erhält

$$\log 4 + (l+1) \log \cos \frac{\pi}{2n} = \log n + \log \sin \frac{\pi}{2n} \quad (6.23)$$

Da n groß angenommen wird, ist

$$\sin \frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}, \quad \cos \frac{\pi}{2n} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 \quad \text{und} \quad \log \cos \frac{\pi}{2n} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2$$

(6.23) wird damit vereinfacht zu

$$\log 4 - (l+1) \frac{\pi^2}{8n^2} \approx \log \frac{\pi}{2},$$

und daraus folgt

$$l+1 \approx \frac{\log 4 - \log(\pi/2)}{2} 8n^2 \approx 0,756 n^2.$$

Montmort hatte ebenfalls eine Näherungsformel gesucht. In der zweiten Auflage seines Werkes machte er folgende Angabe für ungerade n : Man setze $(n+1)/2 = s$. Dann sei es innerhalb von $3s^2 - 3s + 1$ Gängen wahrscheinlicher, daß das Spiel aufhört, als daß es weitergeht. Für gerade n fand er keine Formel.

In der ersten Auflage seiner *Doctrine of Chances* hatte de Moivre diese Formel gelobt. In der zweiten Auflage hingegen macht er zwei Einwände ([8.2], S. 189): Erstens kann der Ausdruck $3s^2 - 3s + 1$ zu $(3/4)n^2 + (1/4)$ vereinfacht werden, und zweitens ist die Formel falsch. De Moivre beweist das an einem Beispiel: Montmort hat mit seiner Formel berechnet, daß bei 45 Einsätzen die Wahrscheinlichkeit des Spielendes innerhalb von 1519 Gängen größer als $1/2$ sei, während de Moivre, wie oben gezeigt wurde, nicht nur schätzt, sondern beweist, daß das Spiel nach 1519 Gängen mit Wahrscheinlichkeit 0,505 weitergeht. Der Tadel, den Todhunter auf Seite 105 seiner *History of the Mathematical Theory of Probability* gegen de Moivre ausspricht, ist also nicht

gerechtfertigt. De Moivre berechnet dann mit seiner Näherungsformel, daß bei gleicher Wahrscheinlichkeit für Spielende und Spielfortgang ungefähr 1531 Gänge nötig sind, was der eben angegebenen genauen Rechnung nicht widerspricht.

Um das Resultat (6.17) von de Moivre mit dem Ergebnis (4.11) des modernen Verfahrens vergleichen zu können, berechnen wir noch die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel im l -ten Gang fertig wird:

$$u_l = \frac{a^n + b^n}{n} (a/b)^{(l-n)/2} 2^l \sum_{m=1}^{n/2} (-1)^{m-1} \sin \frac{2m-1}{2n} \pi \left\{ \cos \frac{2m-1}{2n} \pi \right\}^{l-1}.$$

Aus (4.11) erhält man den genau gleichen Ausdruck, wenn beachtet wird, daß beide Spieler gleich viele Münzen einsetzen müssen und somit $z = g/2 = n$ ist.

Für den ganz allgemeinen Fall, in dem auch diese letzte Einschränkung fallengelassen wird, konnte de Moivre keine trigonometrische Lösung angeben, obwohl er die entsprechenden rationalen Lösungen gefunden hatte. Zwar gibt er in der ersten Auflage der *Doctrine of Chances* ([8.1], S. 151) einige Hinweise; sie führen jedoch kaum zum Ziel. In der *Miscellanea analytica* bemerkt er nur noch ([9], S. 83), daß man ähnliche Formeln wie für gleich hohe Einsätze auch für verschiedene Einsätze finden könne.

Im Anschluß an die Formel (4.11) hatten wir bemerkt, daß mit den Funktionen $\sin \pi v z/g$ bereits die Eigenfunktionen des Randwertproblems für die Wärmeleitung enthalten sind. Das führte zur Frage, ob diese Funktionen schon bei de Moivre vorkommen. Das ist nicht der Fall, denn bei gleich hohen Einsätzen ist $z = g/2$, und die entscheidende Größe $\sin \pi v z/g$ wird damit zu 0, -1 oder $+1$ reduziert.

I.

Beweis der Identität

$$\lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s) \quad (7.1)$$

$$= \frac{1}{a^n s^n} \left\{ 1 - n a b s^2 + \frac{n(n-3)}{2!} a^2 b^2 s^4 - \dots + \frac{-n}{2j-n} \binom{2j-n}{j} a^j b^j s^{2j} + \dots \right\},$$

wobei die $\lambda(s)$ als Wurzeln der Gleichung

$$\lambda(s) - a s \lambda^2(s) + b s$$

bestimmt werden und die Reihe rechter Hand abbricht, sobald j den Wert $n/2$ übersteigt.

Weil $\lambda_1 \lambda_2 = b/a$, kann die linke Seite von (7.1) auch in der Form $\lambda_1^n + (b/a \lambda_1)^n$ geschrieben werden. Durch die Substitutionen $\lambda a s = y$ und $a b s^2 = \alpha$ wird die Bestimmungsgleichung

$$y + \frac{\alpha}{y} = 1$$

und die linke Seite von (7.1)

$$\frac{1}{a^n s^n} \left\{ y^n + \left(\frac{\alpha}{y} \right)^n \right\}.$$

Durch vollständige Induktion soll nun bewiesen werden, daß für $n = 1, 2, \dots$

$$y^n + \left(\frac{\alpha}{y} \right)^n = 1 - n \alpha + \frac{n(n-3)}{2!} \alpha^2 + \dots + \frac{-n}{2j-n} \binom{2j-n}{j} \alpha^j + \dots$$

Offensichtlich ist die Behauptung für $n = 1$ und $n = 2$ richtig.

Ersetzen wir in der Identität

$$\left\{ y^{n+1} + \left(\frac{\alpha}{y} \right)^{n+1} \right\} = \left\{ y^n + \left(\frac{\alpha}{y} \right)^n \right\} \left\{ y + \frac{\alpha}{y} \right\} - \alpha \left\{ y^{n-1} + \left(\frac{\alpha}{y} \right)^{n-1} \right\}$$

den Ausdruck $y + \alpha/y$ durch dessen Wert 1 und betrachten wir die behauptete Entwicklung für alle natürlichen Zahlen von 1 bis n als bewiesen, so finden wir für $n \geq 3$

$$\left\{ y^{n+1} + \left(\frac{\alpha}{y} \right)^{n+1} \right\} = \left\{ 1 - n \alpha + \frac{n(n-3)}{2!} \alpha^2 + \dots + \frac{-n}{2j-n} \binom{2j-n}{j} \alpha^j + \dots \right\}$$

$$- \left\{ \alpha - (n-1) \alpha^2 + \dots + \frac{-(n-1)}{2(j-1)-(n-1)} \binom{2(j-1)-(n-1)}{j-1} \alpha^j + \dots \right\}.$$

Die Summe der beiden Klammerausdrücke rechter Hand beginnt mit $1 - (n+1)\alpha$

$\vdash ((n+1)(n+1-3)/2!) \alpha^2$, und für $3 \leq j \leq (n+1)/2$ erhält man als Koeffizienten der j -ten Potenz von α

$$\begin{aligned} & \frac{-n}{2j-n} \binom{2j-n}{j} - \frac{-(n-1)}{2j-(n+1)} \binom{2j-(n+1)}{j-1} \\ & - \frac{-n}{2j-(n+1)} \binom{2j-(n+1)}{j-1} \left\{ \frac{2j-(n+1)}{j} - \frac{n-1}{n} \right\} \\ & = \frac{-n}{2j-(n+1)} \binom{2j-(n+1)}{j-1} \frac{(j-n)(n+1)}{nj} - \frac{-(n+1)}{2j-(n+1)} \binom{2j-(n+1)}{j}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

II.

Die Wahrscheinlichkeiten e_{n+2i} und w_{n+2i} , daß das Spiel nach dem $n+2i$ -ten Gang endet bzw. weitergeht, sind durch dieselbe Relationsskala verbunden:

Weil das Spiel mit Wahrscheinlichkeit eins einmal aufhört, gilt für alle $i \geq 0$

$$\begin{aligned} w_{n+2i} &= e_{n+2(i+1)} + e_{n+2(i+2)} + \dots \\ w_{n-2+2i} &= e_{n-2+2(i+1)} + e_{n-2+2(i+2)} + \dots \\ &\vdots \\ w_{\delta+2i} &= e_{\delta+2(i+1)} + e_{\delta+2(i+2)} + \dots, \end{aligned}$$

wobei δ gleich 0 oder 1, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

In jeder Kolonne auf der rechten Seite gilt unter den $n/2$ bzw. $(n-1)/2$ Termen die rekurrente Beziehung, z. B.

$$e_{n+2(i+1)} = n a b e_{n+2i} - \frac{n(n-3)}{2!} a^2 b^2 e_{n+2(i-1)} + \dots$$

Weil die Reihe $\{e_{n+2i}\}$ konvergiert, gilt diese Beziehung auch in der Reihe $\{w_{n+2i}\}$ ($i \geq 0$).

III.

Die Identität für gerade n

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \leq m}}^{n/2} \left\{ \cos^2 \frac{2x-1}{2n} \pi - \cos^2 \frac{2\mu-1}{2n} \pi \right\} = \frac{n(-1)^{x-1}}{2^n \cdot \sin(2x-1)\pi/2n \cdot \cos(2x-1)\pi/2n} \quad (7.2)$$

könnten wir mit Hilfe der Exponentialfunktion beweisen. Da das Lemma I der *Miscellanea analytica* (Moivrescher Satz) den grundsätzlich gleichen Beweis ermöglicht, ziehen wir diesen vor.

Wir setzen in den Formeln (6.5) bis (6.9) $a = b = 1/2$. Dadurch wird

$$\lambda_{1,2}(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1-s^2}}{s} \quad \text{und} \quad \cos \gamma = \frac{1}{s}$$

und nach (6.8)

$$2 \cos n \gamma = \lambda_1^n(s) + \lambda_2^n(s) = \left(\frac{1 + \sqrt{1-s^2}}{s} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{s} \right)^n. \quad (7.3)$$

Die rechte Seite ist ein Polynom in $1/s^2 = \cos^2 \gamma$ vom Grade $n/2$. Hat dieses Polynom $n/2$ reelle Nullstellen $\cos^2 \gamma_\mu$, so läßt es sich in der Form

$$c_0 (\cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma_1) (\cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma_2) \cdots (\cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma_{n/2}) \quad (7.4)$$

schreiben. Der Anfangskoeffizient c_0 kann aus (7.3) unter Verwendung der Identität

$$\binom{n}{\nu} = \binom{n-1}{\nu-1} + \binom{n-1}{\nu} \quad (0 < \nu < n)$$

bestimmt werden:

$$c_0 = 2 \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} \right\} = 2^n.$$

Die Nullstellen des Polynoms rechter Hand in (7.3) sind aber auf der linken Seite unmittelbar abzulesen. Daraus folgt

$$\gamma_\mu = \frac{2\mu-1}{2n} \pi \quad (1 \leq \mu \leq n/2)$$

und damit

$$2 \cos n \gamma = 2^n \left(\cos^2 \gamma - \cos^2 \frac{\pi}{2n} \right) \left(\cos^2 \gamma - \cos^2 \frac{3\pi}{2n} \right) \cdots \left(\cos^2 \gamma - \cos^2 \frac{n-1}{2n} \pi \right). \quad (7.5)$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach γ und setzen wir anschließend $\gamma = (2m-1)\pi/2n$, so erhalten wir die gesuchte Identität (7.2).

IV.

Nachdem im November 1966 die vorliegende Arbeit, ausgenommen der Schluß des Kapitels über rekurrente Reihen, fertig war, fiel mir im August 1967 eine Untersuchung in die Hände, die hier nicht unerwähnt bleiben darf. Hans Freudenthal und Hans-Georg Steiner verfaßten für die *Grundzüge der Mathematik*, Band IV (herausgegeben von Heinrich Behnke, Günter Bertram und Robert Sauer), das dritte Kapitel: *Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik*. Es wird dort unter anderem darauf hingewiesen, daß de Moivre in einfachen Fällen schon mit der erzeugenden Funktion gearbeitet hat. Hingegen glaube ich kaum, daß er diese Methode schon dermaßen beherrschte, daß er sie in der Weise auf das Problem der Spieldauer anwenden konnte, wie es in der genannten Untersuchung getan wird.

- [1] Christiaan Huygens, *Œuvres complètes*, publiées par la Société Hollandaise des Sciences (La Haye 1888–1950).
- [2] Jakob Bernoulli, *Meditationes* (Tagebuch), photokopiert.
- [2.a] B. L. van der Waerden, *Manuskript des Kommentars zum Tagebuch von Jakob Bernoulli*.
- [3] Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi* (Basel 1713).
- [3.a] Jakob Bernoulli, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, übersetzt und herausgegeben von R. Haussner; Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, 107/108 (Leipzig 1899).
- [4] Jakob Bernoulli, *Opera*, 2 Bände (Genf 1744).
- [4.a] Jakob Bernoulli, *Werke*, Band 1 (Basel 1969)
- [5.1] *Journal des Sçavans* (Paris 1706, Eloge auf Jakob Bernoulli).
- [5.2] *Histoire de l'Academie Royale des Sciences* (Paris; 1705, Eloge auf Jak. Bernoulli; 1754, Eloge auf A. de Moivre).
- [6.1] Pierre Rémond de Montmort, *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, I. Ed. (Paris 1708).
- [6.2] Pierre Rémond de Montmort, *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, II. Ed. (Paris 1713/14).
- 7.1] Abraham de Moivre, *De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus*, Philosophical Transactions, Vol. XXVII, Nr. 329, S. 213–264 (London 1711).
- [7.2] Niklaus Bernoulli, Abraham de Moivre, *Solutio Generalis Problematis XV. propositi a D. de Moivre in tractatu de Mensura Sortis*, Philosophical Transactions, Vol. XXIX, Nr. 341, S. 133–158 (1717).
- [7.3] Abraham de Moivre, *De Fractionibus Algebraicis Radicalitate immunibus ad Fractiones Simpliciores reducendis, deque summandis Terminis quarumdam Serierum æquali Intervallo a se distantibus*, Philosophical Transactions, Vol. XXXI, Nr. 373, S. 162–178 (1722).
- [7.4] Abraham de Moivre, *De Sectione Anguli*, Philosophical Transactions, Vol. XXXI, Nr. 374, S. 228–230 (1722).
- [8.1] A. de Moivre, *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, I. Ed. (London 1718).
- [8.2] A. de Moivre, *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, II. Ed. (London 1738).
- [8.3] A. de Moivre, *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, III. Ed. (London 1756).
- [9] A. de Moivre, *Miscellanea analytica de Seriebus et Quadraturis* (London 1730).
- [10] Briefwechsel zwischen Niklaus Bernoulli und Abraham de Moivre (Manuskript Universitätsbibliothek Basel L Ia 664).
- [11] Briefwechsel zwischen Niklaus Bernoulli und P. R. de Montmort (Manuskript Universitätsbibliothek Basel L Ia 21,22).
- [12] Nicolas Struyck, *Les Œuvres de N. S. qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale*, traduites du hollandais par J. A. Vollgraaf (Amsterdam 1912).
- [13] P. S. Laplace, *Traité de Mécanique céleste*, II. Ed. (Paris 1829).
- [13.a] P. S. Laplace, *Mechanik des Himmels*, übersetzt von J. C. Burckhardt (Berlin 1800–1802).
- [14] P. S. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, III. Ed. (Paris 1820).
- [14.a] P. S. Laplace, *Quatrième Supplément à la Théorie Analytique des Probabilités*.
- [15] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, II. Ed. (New York and London 1965).

- [16] Samuel Karlin, *A First Course in Stochastic Processes* (New York and London 1966).
- [17] I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability* (Cambridge and London 1865).
- [18] Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Band III (Leipzig 1898).
- [19] Karl Wollenschläger, *Der mathematische Briefwechsel zwischen Johann I. Bernoulli und Abraham de Moivre*, Inaugural-Dissertation, Heidelberg (Basel 1933).
- [20] *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Band I (Basel 1955).
- [21] Hans Freudenthal, *Einige Züge aus der Entwicklung des mathematischen Formalismus*, in: *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3), Band VII (Groningen 1959).
- [22] Hans Freudenthal und Hans-Georg Steiner, *Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik*; enthalten in: *Grundzüge der Mathematik*, Band IV, herausgegeben von Heinrich Behnke, Günter Bertram und Robert Sauer (Göttingen 1966).
- [23] F. N. David, *Games, Gods and Gambling* (London 1962).
- [24] J. Naas, H. L. Schmid, *Mathematisches Wörterbuch* (Berlin 1961).
- [25] MM. Eug. et EM. Haag: *La France Protestante*, Tome VII (Genf 1966).

Ich wurde am 4. Dezember 1939 in Oetwil an der Limmat geboren. Bürgerberechtigt bin ich in Rüschegg BE. Den größten Teil meiner Jugendzeit verbrachte ich in Homburg TG. Nach dem Besuch des Lehrerseminars Kreuzlingen, wo ich im Frühjahr 1959 das thurgauische Primarlehrerpatent erwarb, unterrichtete ich zweieinhalb Jahre an der Primarschule Happerswil TG. Im Herbst 1961 begann ich an der Universität Zürich das Studium der Mathematik mit den Nebenfächern Physik und Astronomie, das ich nach häufigen, durch Militärdienst bedingten Unterbrechungen 1966 mit dem Diplom abschloß.

Ich besuchte Vorlesungen, Übungen und Seminare bei den Herren Dozenten H. Bühlmann, J. J. Burckhardt, M. Gut, E. Hadorn, W. Heitler, H. H. Keller, A. Kriszten, Verena Meyer, R. Nevanlinna, M. Rueff, W. Saxer, H. Staub, E. Stiefel, K. Strebel, A. Thellung, R. M. Tondeur, B. L. van der Waerden, M. Waldmeier. Bei der Abfassung der Diplomarbeit, welche auch schon die Spieldauer zum Thema hatte, leitete mich Herr Prof. Hans Bühlmann, bei der Dissertation Herr Prof. van der Waerden. Beiden Lehrern möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Vom Oktober 1966 bis Juli 1967 studierte ich an der Universität Sheffield im Department of Probability and Statistics von Prof. Gani. Ich beendete den Kurs mit den Prüfungen für den M.Sc.-Degree. Seit Herbst 1967 bin ich Assistent am Mathematischen Institut der Universität Zürich.

